ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

FICHE 1 :

EXERCICE 1 :

1) Une solution semble-t-il. 2) $D = [-3\ ;\ 0] \cup [2\ ;\ +\infty[$ et $S = \left\{-\frac{9}{8}\right\}$ avec $-\frac{9}{8} \in D$.

3) $D = [0\ ;\ +\infty[$. $S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ car $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin D$.

EXERCICE 2 :

1) $D = [1\ ;\ +\infty[$ et $S = \{2+\sqrt{5}\}$ car $(2-\sqrt{5}) \notin D$. 2) $D = \left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et $S = \{1\}$.

EXERCICE 3 :

1) a) Si $m = -5$, alors l'équation est du 1^er^ degré et admet une solution : $x = \frac{3}{20}$.

1) b) Si $m \neq -5$, alors :

$\Delta_x = 4(3m^2 - 7m - 10)$. On étudie le signe du trinôme : $3m^2 - 7m - 10$.

$\Delta_m = 169$; $m_1 = -1$ et $m_2 = \frac{10}{3}$.

- Si $m \in]-\infty\ ;\ -5[\cup]-5\ ;\ -1[\cup \left]\frac{10}{3}\ ;\ +\infty\right[$, alors l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.
- Si $m = -1$, alors l'équation admet une solution double $x = -\frac{1}{2}$.
- Si $m = \frac{10}{3}$, alors l'équation admet une solution double $x = \frac{4}{5}$.
- Si $m \in \left]-1\ ;\ \frac{10}{3}\right[$, alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 :

1) $a = 2m^2 - m - 1$ et $c = -3$.

L'équation est du 2^nd^ degré ssi $a \neq 0$ soit ssi $m \neq 1$ et $m \neq -\frac{1}{2}$.

Par ailleurs, si $m \neq 1$ et $m \neq -\frac{1}{2}$, alors P (produit des racines) $= \frac{c}{a} = -\frac{3}{2m^2 - m - 1}$.

L'équation admet deux racines de signe contraire ssi P < 0

$P < 0 \Leftrightarrow m \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[\cup]1\ ;\ +\infty[$

Conclusion : L'équation admet deux racines de signe contraire ssi $m \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

2) $a = m$ et $c = 2 - m$.

L'équation est du second degré ssi $m \neq 0$.

Par ailleurs, si $m \neq 0$, alors P (produit des racines) $= \frac{c}{a} = \frac{2-m}{m}$

L'équation admet deux racines de signe contraire ssi P < 0

$P < 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty\ ;\ 0[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

Conclusion : L'équation admet deux racines de signe contraire ssi $m \in]-\infty\ ;\ 0[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 5 :

1) a) $D_{g \circ f} = \left]-\infty\ ;\ -\frac{5}{4}\right] \cup]-1\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x \in D_{g \circ f}$, on a : $g \circ f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+1}}$.

b) On observe que $f(x)$ semble se rapprocher de 4 pour x assez grand et $g \circ f(x)$ semble se rapprocher de 2 pour x assez grand, soit la limite de $g \circ f$ semble être 2 en $(+\infty)$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$ donc $\boldsymbol{b = 4}$ et $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to 4}} g(x) = 2$. On observe que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g \circ f(x) = \lim\limits_{X \to 4} g(X)$.

2) a) $D_{g \circ f} = \mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $g \circ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

b) On observe que $f(x)$ semble se rapprocher de $(+\infty)$ pour x négatif et grand en valeur absolue et $g \circ f(x)$ semble se rapprocher de 0 pour x négatif et grand en valeur absolue, soit la limite de $g \circ f$ semble être 0 en $(-\infty)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ donc $\boldsymbol{b = +\infty}$ et $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to +\infty}} g(x) = 0$. On observe que : $\lim\limits_{x \to -\infty} g \circ f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} g(X)$.

3) $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c}$.

EXERCICE 6 :

28 page 45 :

a) $D_f =]-\infty\,;\,1[$. On pose $X = \dfrac{-x+1}{x^2+1}$ pour $x \in]-\infty\,;\,1[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0} \sqrt{X} = 0$ donc, par théorème de composition, on en déduit :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

b)) $D_f =]-1\,;\,1[$. On pose $X = 1 - x^2$ pour $x \in]-1\,;\,1[$.

$\lim\limits_{x \to -1} (1 - x^2) = 1 - (-1)^2 = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \sqrt{X} = 0$ donc, par théorème de composition, on en déduit :
$\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{1 - x^2} = 0$.
On pose $X = \sqrt{1 - x^2}$ pour $x \in]-1\,;\,1[$.

$\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{1 - x^2} = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{1}{X} = +\infty$, donc, par théorème de composition, on en déduit :
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$.
On montrera de même que : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

30 page 46 :

a) $D_f =]-\infty\,;\,1[$. On pose $X = \dfrac{2x^2}{1-x}$ pour $x < 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par théorème de composition, on en déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b) $D_f =]0\,;\,+\infty[$. On pose $X = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{X} = 0^+$ donc, par théorème de composition, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$.

On pose $X = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0} \sin X = 0$ donc, par théorème de composition, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 7 : g est la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2 - x}$.

1) On pose $X = x^2 + 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc, par théorème de composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2} = +\infty$.
On pose $X = x^2 - x$ pour $x \in [1\,;\,+\infty[$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$, donc, par théorème de composition : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2 - x} = +\infty$.

On aboutit donc à une forme indéterminée du type «$+\infty$» – «$+\infty$».

2) $\forall x \geq 1$, on a :

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x})} = \frac{2+x}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}}.$$

3) $\forall x \geq 1$, on a : $\sqrt{x^2+2} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = |x| \times \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} = x \times \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$.

On prouve de même que : $\sqrt{x^2-x} = x \times \sqrt{1-\frac{1}{x}}$ pour tout $x \geq 1$.

Pour tout $x \geq 1$, on a alors : $g(x) = \dfrac{x \times \left(\frac{2}{x}+1\right)}{x \times \left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}}$ (car $x \neq 0$).

4) $\lim_{x\to+\infty} X = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right) = 1$ et $\lim_{X\to 1}\sqrt{X} = 1$, donc, par théorème de composition : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} = 1$.

De même, on prouve que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = 2$, donc par quotient, on en déduit que : $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{2}}$.

FICHE 2 :

EXERCICE 1 :
3 page 72 du LIVRE :

1) $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$; 2) Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-2}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ = le coefficient directeur de la sécante (AM) où M(x ; $f(x)$) est un point de la courbe C.

3) Puisque f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -1$, alors $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x} = f'(0) = -1$.

7 page 72 du LIVRE : $f(0) = 2$; $f(-1) = 1$; $f(2) = -1$; $f'(0) = 0$; $f'(-1) = 2$ et $f'(2) = -\frac{1}{2}$.

6 page 72 du LIVRE : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

45 page 76 du LIVRE :

a) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

TD 6 pages 69//70 du LIVRE :

$\boxed{2}$ 1) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{x+1}$ (car x est proche de 0, mais n'est pas nul).

D'où : $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$. Par suite, $f'_d(0)$ existe et vaut (-1).

La demi-tangente à droite en A à la courbe représentative de f a pour équation : $y = -x + 2$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{- x + 1} = 3.$

Par suite, $f'_g(0)$ existe et vaut 3.

La demi-tangente à gauche en A à la courbe représentative de f a pour équation : $y = 3x + 2$.

Remarque : f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$. A est un point anguleux pour la courbe C_f.

EXERCICE 2 :

1) $f(- 3 + h) \approx 2h - 1$ pour h voisin de 0 ; $f(x) \approx - x + 4$ pour x voisin de 2.

2) a) $f(2 + h) \approx 12h + 8$ pour h voisin de 0 ;

2) b) $(2{,}001)^3 \approx 8{,}012$ ($h = 0{,}001$) ; $(1{,}997)^3 \approx 7{,}964$ ($h = - 0{,}003$) ;

$(- 1{,}999)^3 = - (1{,}999)^3$ et $(1{,}999)^3 \approx 7{,}988$ ($h = - 0{,}001$) donc $(- 1{,}999)^3 \approx - 7{,}988$.

3) a) $f(a + h) \approx 2ah + a^2$ pour h voisin de 0 ;

3) b) $f(a + h) = a^2 + 2ah + h^2$, donc l'erreur commise est de h^2 ;

3) c) h est tel que $|h| = 10^{-3}$ (c'est-à-dire $h = - 10^{-3}$ ou $h = 10^{-3}$).

EXERCICE 3 :

8 page 72 du LIVRE :

a) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 - 3x - 5$;

b) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{6}$.

11 page 72 du LIVRE :

a) $D_f =]0 ; + \infty[$ et $D_{f'} =]0 ; + \infty[$. $\forall\, x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x - 1}{2x\sqrt{x}}$.

b) $D_f =]0 ; + \infty[$ et $D_{f'} =]0 ; + \infty[$. $\forall\, x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x\sqrt{x}}$.

14 page 72 du LIVRE :

a) $\forall\, x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x - 1}$;

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{2\cos x + \sin x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

EXERCICE 4 :

$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 10$ **$D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$** **$f'(x) = 6x^2 - 8x + 1$**	$f(x) = x^4 - \dfrac{x^3}{3} + \sqrt{2}x - \sqrt{5}$ **$D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$** **$f'(x) = 4x^3 - x^2 + \sqrt{2}$**	$f(x) = \sqrt{x} + x^2$ **$D_f = [0 ; + \infty[$ et $D_{f'} =]0 ; + \infty[$** **$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x = \dfrac{1 + 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$**
$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x - 1$ **$D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$** **$f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 4$**	$f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{5} + 2$ **$D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$** **$f'(x) = x - \dfrac{1}{5}$**	$f(x) = \dfrac{x^3 + 6x - 1}{3}$ **$D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$** **$f'(x) = x^2 + 2$**
$f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$** **$f'(x) = \dfrac{- 1}{3x^2}$**	$f(x) = - \dfrac{1}{3x^4}$ **$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$** **$f'(x) = \dfrac{4}{3x^5}$**	$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **$D_f = \mathbb{R} \setminus \{- 1 ; 1\}$ et** **$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{- 1 ; 1\}$** **$f'(x) = \dfrac{- 2x}{(x^2 - 1)^2}$**

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

$f(x) = \sqrt{x}(x+1)$ $\mathbf{D}_f = [0\ ;+\infty[$ **et** $\mathbf{D}_{f'} =]0\ ;+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ $\mathbf{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **et** $\mathbf{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\mathbf{D}_f = \mathbb{R}$ **et** $\mathbf{D}_{f'} = \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$
$f(x) = (4x-1)(x^2 + x\sqrt{x})$ $\mathbf{D}_f = [0\ ;+\infty[$ **et** $\mathbf{D}_{f'} =]0\ ;+\infty[$ $f'(x) = 12x^2 + 10x\sqrt{x} - 2x - \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$	$f(x) = \dfrac{1}{2x^2-x-1}$ $\mathbf{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{1}{2}\ ;1\}$ **et** $\mathbf{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{1}{2}\ ;1\}$ $f'(x) = \dfrac{-4x+1}{(2x^2-x-1)^2}$	$f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ $\mathbf{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **et** $\mathbf{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$ $\mathbf{D}_f =]0\ ;+\infty[$ **et** $\mathbf{D}_{f'} =]0\ ;+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}} + \dfrac{4}{x^3} = \dfrac{8-x\sqrt{x}}{2x^3}$	$f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{x^5}{5}$ $\mathbf{D}_f = [0\ ;+\infty[$ **et** $\mathbf{D}_{f'} =]0\ ;+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - x^4 = \dfrac{\sqrt{x}-x^5}{x}$	$f(x) = \dfrac{1-\cos x}{3+\sin x}$ $\mathbf{D}_f = \mathbb{R}$ **et** $\mathbf{D}_{f'} = \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{3\sin x - \cos x + 1}{(3+\sin x)^2}$

FICHE 3 :

EXERCICE 1 :

16 page 73 du LIVRE : a) $y = -2x + 1$; b) $y = x$.

19 page 73 du LIVRE :

a) Soit $f : x \longmapsto x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto 3x^2$.
L'approximation affine locale de f en 1 est :
$f(1+h) \approx f'(1) \times h + f(1)$ soit $f(1+h) \approx 3h + 1$ pour h voisin de 0.
Conclusion : $(1+x)^3 \approx 3x + 1$ pour x voisin de 0.

b) Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x}$. f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
L'approximation affine locale de f en 1 est :
$f(1+h) \approx f'(1) \times h + f(1)$ soit $f(1+h) \approx \dfrac{1}{2}h + 1$ pour h voisin de 0.
Conclusion : $\sqrt{1+x} \approx \dfrac{1}{2}x + 1$ pour x voisin de 0.

c) Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f' : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
L'approximation affine locale de f en 1 est :
$f(1+h) \approx f'(1) \times h + f(1)$ soit $f(1+h) \approx -h + 1$ pour h voisin de 0.
Conclusion : $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$ pour x voisin de 0.

d) Soit $f : x \longmapsto \sin x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto \cos x$.
L'approximation affine locale de f en 0 est :
$f(0+h) \approx f'(0) \times h + f(0)$ soit $f(h) \approx 1 \times h + 0$.
Conclusion : $\sin x \approx x$ pour x voisin de 0.

EXERCICE 2 :

23 page 73 du LIVRE :

1) $f(-1)$ est un extremum local pour la fonction f donc $f'(-1) = 0$.
$f(-1)$ est un extremum local pour f et cet extremum local est nul, donc $f(-1) = 0$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

2) $\forall\, x \neq 1$, on a : $f'(x) = \dfrac{ax^2 - 2ax - b - 1}{(x-1)^2}$.

En traduisant les données $f'(-1) = 0$ et $f(-1) = 0$, on aboutit au système : $\begin{cases} 3a - b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases}$. Ce système a pour solution : ***a* = 1 et *b* = 2**.

Conclusion : $\forall\, x \neq 1$, **on a :** $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$ **et** $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

f' s'annule en changeant de signe pour $x = -1$, ce qui prouve que f admet un extremum local en $x = -1$. Par ailleurs, on a : $f(-1) = 0$. Donc $f(-1)$ est bien un extremum local pour f et cet extremum local est nul.

EXERCICE 3 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{4}{x-2}$

1) f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a : $f'(x) = x + 1 - \dfrac{4}{(x-2)^2} = \ldots = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)^2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{x-2}\right) = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{2}x^2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4}{x-2}\right) = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} 4 = 4$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} (x-2) = 0^-$, donc par quotient $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{4}{x-2}\right) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{4}{x-2}\right) = -\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.

On montre de la même façon que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{23}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2)

- D'après le tableau de variations précédent, sur $]2\,;3[$ la fonction f est strictement décroissante, donc : $\forall\, x \in\,]2\,;3[$, on a : $f(2) > f(x) > f(3)$ d'où $f(x) > 11{,}5 > 10$.
- D'après le tableau de variations précédent, sur $[3\,;+\infty[$ la fonction f est strictement croissante, donc : $\forall\, x \in [3\,;+\infty[$, on a : $f(x) \geq f(3)$ d'où $f(x) \geq 11{,}5 > 10$.

Conclusion : $\forall\, x \in\,]2\,;+\infty[$, on a $f(x) > 10$, ce qui prouve que 10 est un minorant de la fonction f sur $]2\,;+\infty[$.

EXERCICE 4 : **PARTIE A**

1) $M(x\,;y) \in C \cap (Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

On est ramené à résoudre l'équation : $x^2 - 4x + 5 = 0$

On trouve $\Delta = -4$. $\Delta < 0$, donc l'équation : $x^2 - 4x + 5 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : La courbe *C* ne coupe pas l'axe des abscisses

2) $M(x\,;y) \in C \cap (Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$

Conclusion : La courbe *C* coupe l'axe des ordonnées au point A(0 ; 5).

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

3) Ici, $a = 2$.

① $D_f = \mathbb{R}$. Soit $x \in D_f$.

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2 \times 2 - x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a - x \in D_f$.

D_f est bien centré en $a = 2$.

② Soit $x \in D_f$. Montrons que $f(x) = f(2a - x)$ soit $f(x) = f(4 - x)$.

$f(2a - x) = f(4 - x) = (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 5 = \dots = x^2 - 4x + 5 = f(x)$

$\forall x \in D_f$, on a bien $f(x) = f(2 \times 2 - x)$.

Conclusion : Sous ces deux conditions, la droite d'équation $x = 2$ est bien axe de symétrie de la courbe C dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

4)

- **Limites :** f est une fonction polynôme, donc :
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- **Dérivée de f :** La fonction f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\boldsymbol{f'(x) = 2x - 4}$.
- **Tableau de variation de f**

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5) a) **Équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 3**

$(T) : y = f'(3)(x - 3) + f(3)$ On trouve : $\boldsymbol{(T) : y = 2x - 4}$

5) b) **Position relative de (T) et C.**

On étudie le signe de $f(x) - (2x - 4)$ sur $\mathbb{R}$ et on trouve que :

$\forall x \in D_f, f(x) - (2x - 4) \geq 0$

La parabole C est toujours au dessus de la droite (T).

6) Voir au verso.

PARTIE B

1) $\mathcal{D}_0 : y = 2x$ et $\mathcal{D}_{-5} : y = 2x - 5$.

2) **Nombre de points d'intersection de la parabole C et de la droite D_m**

$$M(x\,;\,y) \in C \cap D_m \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + m = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 - m = 0 \\ y = 2x + m \end{cases}$$

On est ramené à résoudre l'équation : $x^2 - 6x + 5 - m = 0$

On trouve que : $\Delta = 16 + 4m$.

L'équation $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ a :

- aucune solution ssi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -4$
- 1 solution ssi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -4$
- 2 solutions distinctes ssi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -4$

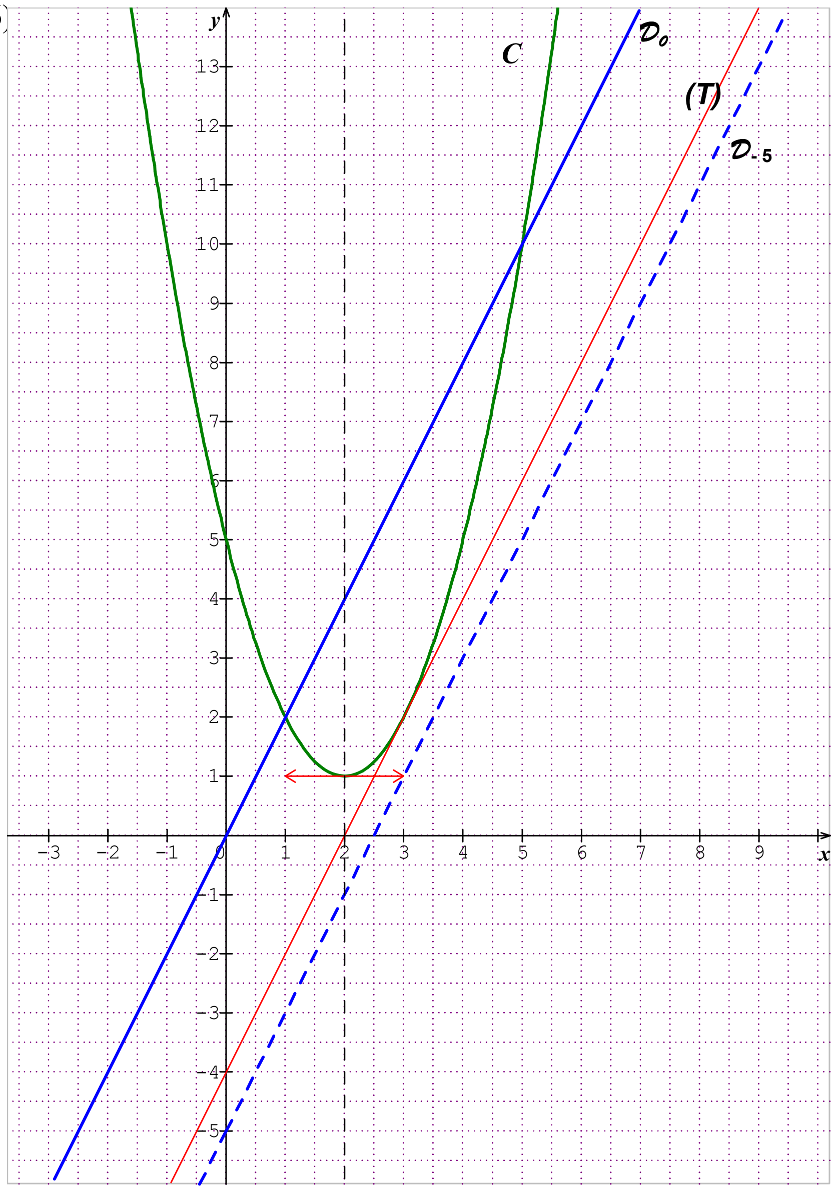
On en déduit que :

La parabole C et la droite D_m n'ont aucun point commun ssi $m < -4$.

La parabole C et la droite D_m ont un unique point commun ssi $m = -4$.

La parabole C et la droite D_m ont 2 points communs distincts ssi $m > -4$.

A) 6)



EXERCICE 5 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x + \pi) = \cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x = f(x)$.

Ceci prouve que f est périodique de période π.

2) $D = \mathbb{R}$ est centré en 0 ;

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(-x) = \cos^2(-x) = \cos^2 x = f(x)$ car la fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$.

Sous ces deux conditions, on en déduit que f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour C dans un repère orthogonal.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

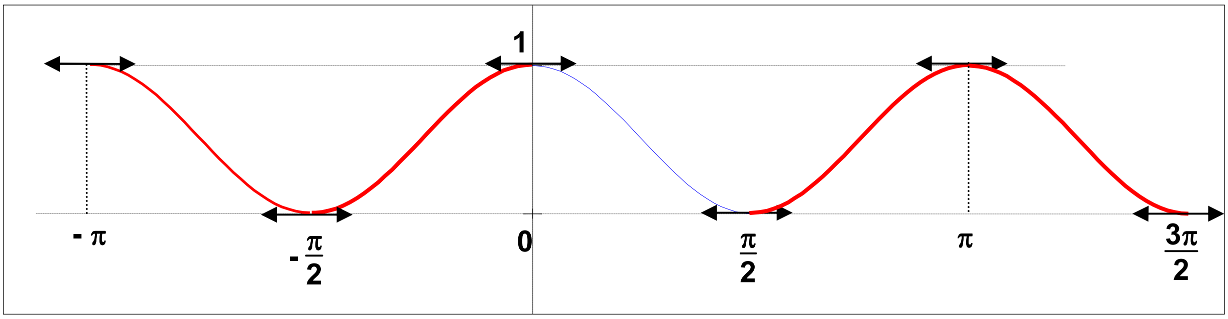
3) La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par produit, la fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -2\sin x \cos x$;

$\forall x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$, et par suite $f'(x) < 0$ et on a $f'(0) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. On a : $f'(0) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc la courbe C admet une tangente horizontale aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$.

4) On trace la courbe représentant f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, puis par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on construit la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction f étant périodique de période π, pour obtenir la courbe C, on trace les translatées de la courbe obtenue sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ par les translations de vecteurs $k\pi\,\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.



EXERCICE 6 :

27 page 74 du LIVRE :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 6(x + 1)(x^2 + 2x - 3)^2$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} \times \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2$.

c) $\forall u \in \mathbb{R}$, on a : $f'(u) = 4(2u + 3)$. d) $\forall u \in \mathbb{R}$, on a : $f'(u) = 9(3u - 1)^2$.

28 page 74 du LIVRE :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -2\sin(2x)$. b) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c) $\forall t \in \mathbb{R}$, on a : $f'(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

29 page 74 du LIVRE :

a) $\forall x \in]-\infty ; 4[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}$. b) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

c) $\forall x \in]-2 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x+2}}{2(x+2)^2}$. d) $\forall t \in]-1 ; 2[$, on a : $x'(t) = \dfrac{3\sqrt{2-t}}{2\sqrt{t+1}(2-t)^2}$.

85 page 82 du LIVRE :

1. En utilisant les notations de l'énoncé, on a : $f = g \circ u$

- u est dérivable sur D ;
- $\forall x \in D$, on a : $u(x) > 0$;
- La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$;

Donc, par théorème de composition, on en déduit que la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur D.

$\forall\, x \in D$, on a : $f'(x) = u'(x) \times g'[u(x)] = u'(x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$ d'après le pré-requis. D'où le résultat demandé.

2. On a $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2(1 - x)$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) donc sur $]0\,;\,1[$;
$\forall\, x \in\,]0\,;\,1[$, on a : $u(x) > 0$.
Par suite, d'après la question 1), la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,1[$. Il reste à étudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.

<u>Dérivabilité en 0 :</u>

$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt{1 - x}$ *(indication : $\sqrt{x^2} = |x| = x$ car $x > 0$).*

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$, donc f est dérivable à droite en 0 et $\boldsymbol{f'_d(0) = 1}$.

<u>Dérivabilité en 1 :</u>

$\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\sqrt{\dfrac{x^2}{1 - x}}$ *(indication : $\sqrt{(1 - x)^2} = |1 - x| = 1 - x$ car $x \in [0\,;\,1[$)*

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$, donc la fonction **$f$ n'est pas dérivable en 1**.

Enfin, pour tout $x \in\,]0\,;\,1[$, on a : $f'(x) = \dfrac{x(2 - 3x)}{2\sqrt{x^2(1 - x)}}$.

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$	1	$+$	**0**	$-$	$\Vert$
f	**0**	↗	$\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$	↘	**0**

EXERCICE 7 :

$f(x) = (\sqrt{3}x - 1)(x^2 + x - 1)$ $\mathbf{D_f = \mathbb{R}}$ **et** $\mathbf{D_{f'} = \mathbb{R}}$ $\boldsymbol{f'(x) = 3\sqrt{3}x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} - 1}$	$f(x) = \dfrac{1}{2x} - x^4 + \sqrt{2}\dfrac{x}{4} - 20$ $\mathbf{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ **et** $\mathbf{D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{-16x^5 + \sqrt{2}x^2 - 2}{4x^2}}$	$f(x) = \dfrac{(2x + 1)^2}{(x - 1)^2}$ $\mathbf{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$ **et** $\mathbf{D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$ $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{-6(2x + 1)}{(x - 1)^3}}$
$f(x) = (2x + 1)^3$ $\mathbf{D_f = \mathbb{R}}$ **et** $\mathbf{D_{f'} = \mathbb{R}}$ $\boldsymbol{f'(x) = 6(2x + 1)^2}$	$f(x) = \sqrt{2x - 1}$ $\mathbf{D_f = [\frac{1}{2}\,;\,+\infty[}$ **et** $\mathbf{D_{f'} =]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[}$ $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}}$	$f(x) = (3x + 2)^4$ $\mathbf{D_f = \mathbb{R}}$ **et** $\mathbf{D_{f'} = \mathbb{R}}$ $\boldsymbol{f'(x) = 12(3x + 2)^3}$

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

$f(x) = \sqrt{1 - x}$ $D_f =]- \infty ; 1]$ et $D_{f'} =]- \infty ; 1[$ $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$	$f(x) = (x^2 - 2x + 5)^2$ $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$ $f'(x) = 4(x - 1)(x^2 - 2x + 5)$	$f(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$ $D_f = [0 ; +\infty[$ et $D_{f'} =]0 ; +\infty[$ $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 5}$ $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 5}}$	$f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 1)^5}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ et $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ $f'(x) = \dfrac{-10x}{(x^2 - 1)^6}$	$f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$ $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{2x((x^2+1)^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$
$f(x) = \cos\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}\sin\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$	$f(x) = (2x^3 + 3x - 1)^4$ $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$ $f'(x) = 12(2x^2 + 1)(2x^3 + 3x - 1)^3$	$f(x) = \sqrt{3 + 2\sin^2 x}$ $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{2\sin x \cos x}{\sqrt{3 + 2\sin^2 x}}$
$f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}\sqrt{x}$ $D_f = [0 ; +\infty[$ et $D_{f'} =]0 ; +\infty[$ $f'(x) = \dfrac{x^2 + 10x - 3}{2\sqrt{x}(x+3)^2}$	$f(x) = \dfrac{2}{x^2 - x + 1} + \sqrt{2x}$ $D_f = [0 ; +\infty[$ et $D_{f'} =]0 ; +\infty[$ $f'(x) = \dfrac{-4x(2x-1) + \sqrt{2x}(x^2 - x + 1)^2}{2x(x^2 - x + 1)^2}$	$f(x) = \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2}{x-1}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2(x-1)^2}$

EXERCICE 8 : Les équations des tangentes à la courbe *C* représentant la fonction *f*, au point d'abscisse *a*, sont :

f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $a = 1$ $y = 0$	f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ et $a = -2$ $y = -\dfrac{1}{4}x - 2$
f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 3$ $y = \dfrac{\sqrt{3}}{6}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	f définie par $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x-1}$ et $a = 2$ $y = 5x - 7$
f définie par $f(x) = \sqrt{x + 5}$ et $a = -1$ $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$	f définie par $f(x) = (3x + 1)^2$ et $a = 0$ $y = 6x + 1$
f définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ et $a = 1$ $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$	f définie par $f(x) = \lvert x^2 - 1\rvert$ et $a = 2$ $y = 4x - 5$

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

EXERCICE 9 :

36 page 74 du LIVRE :

1) $\forall\, x \in [0\,;\,1[$, on a : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $u(x) = \dfrac{x^3}{1 - x}$.

- u est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc u est dérivable sur $]0\,;\,1[$;
- $\forall\, x \in\,]0\,;\,1[$, on a : $u(x) \in\,]0\,;\,+\infty[$;
- la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$,

sous ces trois conditions, par théorème de composition, on en déduit que la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]0\,;\,1[$.

2) a) Le théorème de composition pour la dérivation donne des conditions suffisantes pour en déduire que la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]0\,;\,1[$. Pour savoir si f est dérivable en 0, il faut revenir à la définition.

2) b) On montre que pour tout $x \in\,]0\,;\,1[$, $t(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1 - x}}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} t(x) = 0$, ce qui prouve que la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

EXERCICE 10 :

24 page 73 du LIVRE :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2) f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Conclusion : f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et sur $[1\,;\,+\infty[$; f est strictement décroissante sur $[-1\,;\,1]$.

3)

- f est dérivable sur $]-\infty\,;\,-1]$ et $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,-1[$. Par ailleurs, $f(]-\infty\,;\,-1[) =]-\infty\,;\,3\,[$ et

$0 \in\,]-\infty\,;\,3[$, donc, d'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α_1 dans $]-\infty\,;\,-1[$.

- f est dérivable sur $[-1\,;\,1]$ et $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;\,1[$. Par ailleurs, $f(]-1\,;\,1[) =]-1\,;\,3\,[$ et

$0 \in\,]-1\,;\,3[$, donc, d'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α_2 dans $]-1\,;\,1[$.

- On montre de la même façon que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α_3 sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

4)

$f(-2) = -1$ et $f(-1) = 3$. Donc $f(-2) \times f(-1) < 0$. Par suite, on a : $-2 < \alpha_1 < -1$.

$f(-1{,}9) = -0{,}159$ et $f(-1{,}8) = 0{,}568$. Donc $f(-1{,}9) \times f(-1{,}8) < 0$. Par suite : $\boxed{-1{,}9 < \alpha_1 < -1{,}8}$.

Par balayage, on trouve de la même façon que : $\boxed{0{,}3 < \alpha_2 < 0{,}4}$ et $\boxed{1{,}5 < \alpha_3 < 1{,}6}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

56 page 77 du LIVRE :

$x(2x+1)^2 = 5 \iff 4x^3 + 4x^2 + x - 5 = 0$

On étudie la fonction $f : x \longmapsto 4x^3 + 4x^2 + x - 5$.

f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto 12x^2 + 8x + 1$.

Le trinôme $(12x^2 + 8x + 1)$ admet deux racines : $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{6}$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\frac{137}{27}$	↗	$+\infty$

Par lecture du tableau de variations, on a :

- sur $]-\infty\,;-\frac{1}{6}]$, $f(x) \leq -5 < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ ou $x(2x+1)^2 = 5$ n'a pas de solution sur $]-\infty\,;-\frac{1}{6}]$.
- sur $]-\frac{1}{6}\,;+\infty[$, f est dérivable ; $f'(x) > 0$ et $f(]-\frac{1}{6}\,;+\infty[) =]-\frac{137}{27}\,;+\infty[$. Comme $0 \in]-\frac{137}{27}\,;+\infty[$, alors, d'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-\frac{1}{6}\,;+\infty[$.

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ ou $x(2x+1)^2 = 5$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, cette solution α appartient à $]-\frac{1}{6}\,;+\infty[$.

Par balayage avec la calculatrice, on obtient successivement :

$f(0{,}7) = -0{,}968$ et $f(0{,}8) = 0{,}408$. Donc $f(0{,}7) \times f(0{,}8) < 0$ et par suite : $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.

$f(0{,}77) \approx -0{,}032$ et $f(0{,}78) \approx 0{,}112$. Donc $f(0{,}77) \times f(0{,}78) < 0$ et par suite : $0{,}77 < \alpha < 0{,}78$.

Un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution est : $\boxed{0{,}77 < \alpha < 0{,}78}$.

40 page 74 du LIVRE :

f est une fonction polynôme, donc f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$ et $f''(x) = x^2 + x + 1$.

2) a) le discriminant du trinôme $(x^2 + x + 1)$ est $\Delta = -3$. $f''(x)$ est donc du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		
f'	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Sur $]-\infty\,;+\infty[$, la fonction f' est dérivable, $f''(x) > 0$ et $f'(]-\infty\,;+\infty[) =]-\infty\,;+\infty[$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 1.

Comme $0 \in f'(]-\infty ; +\infty[)$, alors d'après le théorème de la bijection, on en déduit qu'il existe un unique α appartenant à $]-\infty ; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Comme f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $\forall x < \alpha$, on a : $f'(x) < 0$ et $\forall x > \alpha$, on a : $f'(x) > 0$.

2) b)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

<u>EXERCICE 11 :</u> Non rédigé ! Utiliser le théorème de la bijection.

a) Une solution : -2 ;

b) 2 solutions : l'une appartient à $]-\infty ; -2[$ et l'autre appartient à $]-2 ; 3[$.