FICHE N° 1

EXERCICE N° 1 :

1 page 129 du LIVRE : a = $\frac{16}{5}$; **b** = $2e$; **c** = 1.

2 page 129 du LIVRE : D =]1 ; + ∞[. $e^{\ln(x-1)+\ln(x)} = e^{\ln(x-1)} \times e^{\ln(x)} = \dots$

4 page 129 du LIVRE : a) $\mathbb{R}^*$; **b)**]- ∞ ; 1[; **c)**]3 ; + ∞[; **d)**]- 1 ; 0[∪]0 ; + ∞[; **e)**]0 ; 1[∪]1 ; + ∞[.

5 page 129 du LIVRE : a)]- ∞ ; - 4[∪]0 ; + ∞[; **b)** $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$; **c)** $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ **d)**]2 ; 3[.

6 page 129 du LIVRE : a)]0 ; + ∞[; **b)** $\mathbb{R}^*$; **c)**]- 1 ; + ∞[; **d)**]- ∞ ; - 1[∪]1 ; + ∞[.

EXERCICE N° 2 : ***Extrait de l'épreuve du concours EFREI (mai 2010)***

I) a.]0 ; + ∞[: FAUX ; **b.** $\mathbb{R}$: FAUX ; **c.** $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right\}$: **VRAI**.

Penser à la condition : $2x^2 + \frac{1}{2} \neq 1$ car ln 1 = 0 !

II) a. 2ln(6) : FAUX ; **b.** n'existe pas : **VRAI** car $3 - \sqrt{10} < 0$; **c.** 0 : FAUX.

EXERCICE N° 3 : ***Extrait de l'épreuve du concours ESIEE (mai 2010)***

(A) $\ln(e^x + 1) = x + 1$: FAUX ($\forall x > 0$, $x + 1 = \ln(e^{x+1})$ et en général $e^{x+1} \neq e^x + 1$) ;

(**B**) $\ln(e^{x+1}) = x + e$: FAUX ($\forall x > 0$, $\ln(e^{x+1}) = x + 1$) ;

(C) $e^{\ln(x+1)} = x + 1$: **VRAI** ; **(D)** $e^{1+\ln(x)} = x + e$: FAUX car $\forall x > 0$, $e^{1+\ln(x)} = ex$ et $ex \neq x + e$ sauf si $x = \frac{e}{e-1}$;

(E) $e^{\ln(xe^x)} = e^{x+\ln(e^x)}$: FAUX car $e^{\ln(xe^x)} = xe^x$ et $e^{x+\ln(e^x)} = e^x \times e^x = e^{2x}$ et $\forall x > 0$, on a : $e^x > x$.

EXERCICE N° 4 :

8 page 129 du LIVRE : a) $\boldsymbol{S} = \{\ln(3) - 2\}$; **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\boldsymbol{S} = \left\{\frac{\ln 2}{1 - \ln 2}\right\}$; **c)** $\boldsymbol{S} = \{\ln 4\}$; **d)** $\boldsymbol{S} = \{\ln(e^2 - 1)\}$.

9 page 129 du LIVRE : a) $\boldsymbol{S}$ =]0 ; e[; **b)** $\boldsymbol{S}$ = [e^2 ; + ∞[; **c)** $\boldsymbol{S}$ = $\left[\frac{1}{e} ; e^2\right]$; **d)** D = $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et $\boldsymbol{S}$ = $\left]\frac{1+e}{2e} ; +\infty\right[$.

11 page 129 du LIVRE : a) D =]2 ; + ∞[et $\boldsymbol{S}$ = {3} ; **b)** D =]- ∞ ; - 2[et $\boldsymbol{S}$ = {- 4}.

13 page 129 du LIVRE : Corrigé dans le livre page 470.

EXERCICE N° 5 : Résoudre chacune des inéquations suivantes :

1) a.]- 3 ; 2[; **b.** D =]0 ; + ∞[et $\boldsymbol{S}$ =]e^{-3} ; e^2[**; c.** $D = \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{S}$ =]- ∞ ; ln2[.

2) a. D =]2 ; + ∞[et $\boldsymbol{S}$ =]2 ; 3] ; **b.** D =]- ∞ ; - 3[∪]2 ; + ∞[et $\boldsymbol{S}$ = [- 4 ; - 3[∪]2 ; 3].

EXERCICE N° 6 :

63 page 135 du LIVRE : 1) D =]0 ; + ∞[et $\boldsymbol{S} = \left\{\frac{1}{e} ; e^3\right\}$; **2)** D =]0 ; + ∞[et $\boldsymbol{S}$ = $\left]0 ; \frac{1}{e}\right]$ ∪ [e^3 ; + ∞[.

65 page 135 du LIVRE :

a) $D = \mathbb{R}^*$. Si $x < 0$, on a $|x| = -x$ et on trouve $\boldsymbol{S_1}$ =]- ∞ ; - e^3[∪ $\left]-\frac{1}{e} ; 0\right[$.

Si $x > 0$, on a $|x| = x$ et on trouve $\boldsymbol{S_2}$ = $\left]0 ; \frac{1}{e}\right[$ ∪]e^3 ; + ∞[.

D'où : $\boldsymbol{S}$ =]- ∞ ; - e^3[∪ $\left]-\frac{1}{e} ; 0\right[$ ∪ $\left]0 ; \frac{1}{e}\right[$ ∪]e^3 ; + ∞[.

Remarque : on peut aussi raisonner en une seule étape et poser X = ln$|x|$ … si vous êtes à l'aise avec les valeurs absolues …

b) $D = \mathbb{R}$ et ***S*** **=**]- ln3 ; ln 2[.

66 page 135 du LIVRE :

On doit avoir $x > 0$ et $y > 0$.

On trouve en résolvant le système d'inconnues X = ln$x$ et Y = ln$y$: X = 3 et Y = 1.

S **=** $\{ (x\,;y) = (e^3\,;e)\}$.

EXERCICE N° 7 :

1) A = 3ln3 ; **B =** ln(3) – 4ln2 ; **C =** $\frac{5}{2}$ln3 ; **D =** 0 ; **E =** 6.

2) a) ln(6) = $a + b$; ln(9) = $2b$; $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = a - b$; $\ln\left(\frac{1}{12}\right) = -2a - b$; $\ln\left(\sqrt{12}\right) = a + \frac{1}{2}b$ et ln(72) = $3a + 2b$.

b) A = ln2 ; **B =** 18ln2 .

EXERCICE N° 8 : *Extrait de l'épreuve du concours EFREI (mai 2010)*

a. $2\ln(e^{2x} + 1) - 2x$: **VRAI** (mettre e^{-2x} en facteur) ;

b. $4x\ln(2e^{2x})$: **FAUX** (ContreEX : $f(0) = 2\ln 2$ et $4 \times 0 \times \ln(2 \times 1) = 0$) ;

c. 2 : **FAUX** ($f(0) = 2\ln 2 \neq 2$).

EXERCICE N° 9 :

15 page 129 du LIVRE : a = 2ln5 + ln2 ; **b =** 4ln2 – 2ln5 ; **c =** 3ln5 + ln2.

18 page 130 du LIVRE : a = - ln3 ; **b =** ln5.

20 page 130 du LIVRE : a)]1 ; + ∞[; **b)**]1 ; + ∞[.

21 page 130 du LIVRE :

a) $n\ln 2 \leq \ln 100 \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln 100}{\ln 2}$ car ln2 > 0 et on trouve que ***n* est un entier naturel tel que 0 ≤ *n* ≤ 6.**

b) $n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{-\ln 3}$ et on trouve que ***n* est un entier naturel tel que *n* ≥ 5.**

c) $\ln(0{,}2) \geq n\ln(0{,}4) \Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}4)} \leq n$ car ln(0,4) < 0 et on trouve que ***n* est un entier naturel tel que *n* ≥ 2.**

d) $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1{,}03)}$ et on trouve que ***n* est un entier naturel tel que *n* ≥ 24.**

22 page 130 du LIVRE : a) D =]0 ; + ∞[et ***S*** **=** ∅ ; **b)** D =]0 ; + ∞[et ***S*** **=** ∅ .

25 page 130 du LIVRE : a) D =]1 ; 5[et ***S*** **=** [2 ; 4] ; **b)** $D = \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et ***S*** **=** $\left]\frac{1}{3}\,;1\right]$.

FICHE N° 2

EXERCICE N° 1 : *Extrait de l'épreuve du concours ESIEE (mai 2010)*

Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \in\ ]0\,;+\infty[$.

On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Alors :

(A) S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2000$, alors $q > 1$:

VRAI (Par l'absurde : si $0 < q \leq 1$, alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n \leq 1$, ce qui contredit l'hypothèse).

(**B**) Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < \frac{1}{2}$: **VRAI** (car $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ vu que $0 < q < 1$).

(C) Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$: **VRAI** car $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ car $q \neq 1$.

(D) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$, alors $q = \frac{1}{2}$: **VRAI** car

si $q \geq 1$, on prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ et si $0 < q < 1$, on prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$ et on en déduit que $q = \frac{1}{2}$.

(E) Si $q = 2$, alors $S_4 = 15$: **FAUX** car si $q = 2$, alors $S_4 = \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 31$.

<u>EXERCICE N° 2 : *Extrait de l'épreuve du concours FESIC (mai 2010)*</u>

Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

On considère la suite u définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n^2$.

On admettra que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.
On considère alors la suite v définie par $v_n = \ln(\sqrt{2}u_n)$.

a. La suite v est géométrique : **VRAI** (on prouve que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$) ;

b. $v_{10} = -512 \times \ln(2)$: **VRAI** ($v_{10} = 2^{10}v_0 = 2^{10} \times \left(-\frac{1}{2}\right)\ln(2)$) ;

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k = (\ln 2)(1 - 2^n)$: **FAUX** car $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k = (-\ln(\sqrt{2}) \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \ln(2)\left(\frac{1}{2} - 2^n\right)$;

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = \frac{1}{2^{2^n}}$: **FAUX** car $u_0 \times u_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{2^{2^1}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

EXERCICE N° 3 : *Annabac 2012 : Exercice 2 pages 64/65 sauf question 3).*
Correction pages 71/72/73.

EXERCICE N° 4 : 87 page 138 du LIVRE.

Remarque : on peut démontrer (par récurrence sur n) que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$, ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$.

Son terme initial est : $v_0 = 1$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln(u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$.

3) a) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ vu que $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

3) b) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = 2$ et on utilise ensuite la continuité de la fonction exp au point 2.

Rappel : Si une suite (v_n) converge vers une limite L et si f est continue sur un intervalle contenant L, alors la suite $(f(v_n))$ converge vers f(L).

EXERCICE N° 5 : ***Annabac 2012 : Partie B page 205.***
Correction pages 211/212/213.

EXERCICE N° 6 :
1.

x	0		e^2		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2. On prouve que g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $\forall\, x > 0$, $g'(x) = \ln(x) - 2 = u(x)$.
On en déduit, d'après 1), le tableau de variations suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ 0^-	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : pour déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, on pourra mettre x en facteur dans l'expression de $g(x)$.

Conclusion : g est strictement décroissante sur $]0\,; e^2]$ et g est strictement croissante sur $[e^2\,; +\infty[$.

EXERCICE N° 7 : f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \left(\ln(x)\right)^2$.

1. On prouve que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

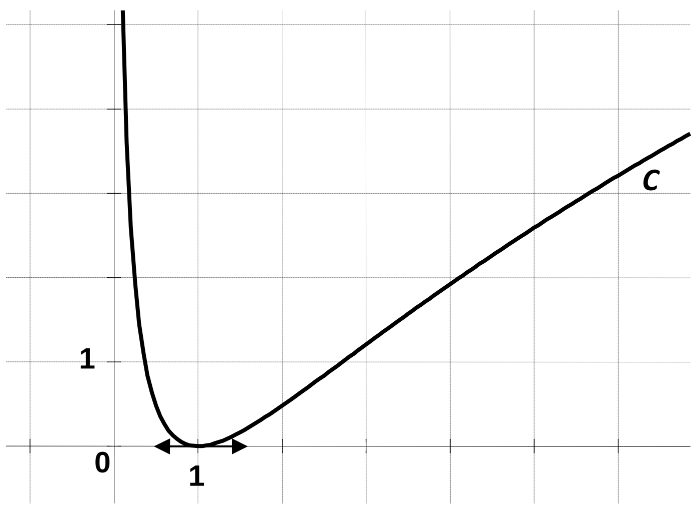
2. On prouve que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall\, x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

3. $\forall\, x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)$.
Si $0 < x \leq 1$, on a : $f'(x) \leq 0$ et si $x \geq 1$, on a : $f'(x) \geq 0$.
***f* est strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et *f* est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.**

4.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5.



L'axe des ordonnées est asymptote à C et la courbe C admet au point d'abscisse 1 une tangente horizontale.

EXERCICE N° 8 : ***Extrait de Polynésie, septembre 2009***
Annabac 2012 : Exercice 4 Partie A et Partie B pages 275/276.
Correction pages 277/278/279/280.

EXERCICE N° 9 : ***Extrait de l'épreuve du concours EFREI (mai 2010)***
On pose : $\forall\, x > 0$, $f(x) = 2\ln(x) - 1 + x^2$. L'équation proposée équivaut à résoudre $f(x) = 0$.

On prouve que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x} + 2x$.

On a donc : $\forall\, x > 0$, $f'(x) > 0$.
On prouve que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On prouve que f établit une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$ et grâce au théorème de la bijection, on prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. D'où :
a. 1 solution : **VRAI ;** **b.** aucune solution : **FAUX ;** **c.** deux solutions : **FAUX.**

EXERCICE N° 10 :
Annabac 2012 : Exercice 1 pages 83/84 sauf question 4).
Correction pages 89/90/91/92/93/94.
<u>***Annabac 2012 : Exercice 6 pages 237/238***</u> **(*Correction pages 249/250).***

<u>EXERCICE N° 11 : *Extrait de l'épreuve du concours EFREI (mai 2010)*</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(5e^x + 1) - 5x\,] = \ldots$

a. $-\infty$: **VRAI** ; **b.** 1 : **FAUX** ; **c.** 0 : **FAUX.**

$\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\ln(5e^x + 1) - 5x = \ln(e^x\,(5 + e^{-x})) - 5x = \ln(e^x) + \ln(5 + e^{-x}) - 5x = -4x + \ln(5 + e^{-x})$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (-4x) = -\infty$ et on prouve (théorème par composition) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(5 + e^{-x}) = \ln(5)$ et .

EXERCICE N° 12 : Soit deux fonctions u et v telles que $u(x) = x - \ln x$ définie sur $]0\,;+\infty[$ et $v(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ définie sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = +\infty}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$: on a une F.I. *On pourra mettre x en facteur pour lever l'indétermination.*

On trouve que : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x\ln(x)) = 0^-$ et par passage à l'inverse, on obtient : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} v(x) = -\infty}$.
On prouve que : si $0 < x < 1$, $x\ln(x) < 0$ et si $x > 1$, $x\ln(x) > 0$.
On en déduit : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1^-} v(x) = -\infty}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1^+} v(x) = +\infty}$. Enfin : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 0^+}$.

EXERCICE N° 13 : 81 page 137 du LIVRE.
1) a) On prouve que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$.

1) b) h est dérivable et <u>continue sur I</u> par somme de fonctions dérivables et continues sur I.

$\forall\, x \in$ I , on a : $h'(x) = \dfrac{x+1}{x}$. On prouve que : $\forall\, x \in$ I , on a : $h'(x) > 0$, ce qui permet d'en déduire que la fonction <u>h est strictement croissante sur I</u>.
Enfin : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.
On en déduit que h établit une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$.

Comme $0 \in h(]0 ; +\infty[)$, alors par théorème de la bijection, on en déduit l'existence d'un unique réel α appartenant à $I =]0 ; +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$.
Enfin : $h(0,5) = 0,5 + \ln(0,5) \approx -0,193$ et $h(0,6) = 0,6 + \ln(0,6) \approx 0,09$. Comme $h(0,5) < 0 < h(0,6)$ et que h est strictement croissante sur $[0,5 ; 0,6]$, alors : $\mathbf{0,5 < \alpha < 0,6}$.

1) c) $\forall x > 0$, on a : $f(x) - x = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

Comme h est strictement croissante sur $I =]0 ; +\infty[$, alors :
si $0 < x < \alpha$, on a : $h(x) < h(\alpha)$ soit $h(x) < 0$; $h(\alpha) = 0$; si $\alpha < x$, on a : $h(\alpha) < h(x)$ soit $0 < h(x)$.
Comme on a : $x^2 > 0$ sur $I =]0 ; +\infty[$, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	-	0	+	
Position de la courbe C par rapport à la droite d	‖	C est en dessous de la droite d	**Point commun**	C est au-dessus de la droite d	

2) a) f est dérivable sur $I =]0 ; +\infty[$ par quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas sur I) et par somme de fonctions dérivables sur I.

On prouve que $\forall x \in I$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3}$.

On pose donc : $\forall x > 0$, $g(x) = 1 - 2\ln(x) + x^3 - x$.

2) b) On prouve que g est dérivable sur I et : $\forall x \in I$, on a : $g'(x) = \dfrac{3x^3 - x - 2}{x} = \dfrac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$.

On prouve que : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
g	‖ $+\infty$	↘	**1**	↗	$+\infty$

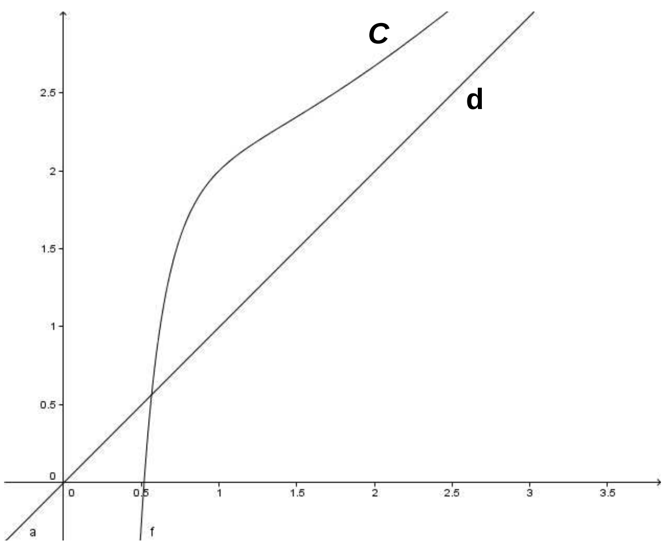
D'après le tableau de variations ci-dessus, on en déduit : $\forall x > 0$, $g(x) \geq 1$.

2) c) $\forall x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

Or, $\forall x > 0$, on a : $g(x) > 0$. Le signe de $f'(x)$ sur I dépend donc de celui de x^3 ou de celui de x.
On prouve que f est strictement croissante sur $I =]0 ; +\infty[$.
On prouve que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque : pour la limite en 0^+, on a une F.I. du type "$\infty - \infty$".
Pour lever l'indétermination, on pourra écrire $f(x)$ sous la forme :

$\forall x > 0$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(x^2 + 1 + \dfrac{\ln x}{x}\right)$



EXERCICE N° 14 :

On pose : $\forall\ x > 0,\ f(x) = x - \ln(x)$.

On prouve que f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et on a : $\forall\ x > 0,\ f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

On prouve que f est strictement décroissante sur $]0\ ;1]$ et que f est strictement croissante sur $[1\ ;+\infty[$.
f admet donc un minimum en $x = 1$ qui vaut $f(1) = 1$.
On en déduit alors : $\forall\ x > 0,\ f(x) \geq 1 > 0 \Leftrightarrow\ \forall\ x > 0,\ x - \ln(x) > 0\ \Leftrightarrow\ \forall\ x > 0,\ \ln(x) < x$.

EXERCICE N° 15 :

32 page 130 du LIVRE :

1) On prouve que f est dérivable sur $I =]0\ ;+\infty[$. On prouve que : $\forall\ x \in I,\ f(x) = \dfrac{ax^2 + 1 - \ln(x)}{x^2}$.

2) a) D'après l'énoncé, la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$.
Ces deux droites ont donc le même coefficient directeur. Or, celui de la tangente en A est $f'(1)$ et celui de la droite d'équation donnée est 3. On en déduit que : $f'(1) = 3$.
$f'(1) = 3\ \Leftrightarrow\ a + 1 = 3\ \Leftrightarrow\ a = 2$.
2) b) $f(1) = a + b$ et $A(1\ ;0) \in C$. On en déduit que : $a + b = 0$ et par suite : $b = -2$.

3) $\forall\ x > 0$, on a : $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{x}\ln(x)$.

35 page 131 du LIVRE :

Remarque : $n \in \mathbb{N}^*$, donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{n}{n+1} > 0$ et $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ est défini.

1) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

On prouve que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$ et on utilise ensuite la continuité de la fonction ln au point 1.

> *Rappel :* Si une suite (v_n) converge vers une limite L et si f est continue sur un intervalle contenant L, alors la suite $(f(v_n))$ converge vers $f(L)$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(1) = 0$.

2) a) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n$.

On démontre (par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$) la propriété :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$: "$S_n = -\ln(n+1)$".

* Pour $n = 1$, on a : $S_1 = u_1 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ et $-\ln(1 + 1) = -\ln(2)$.

* On suppose $P(n)$ vraie pour <u>un entier $n \in \mathbb{N}^*$</u> et on prouve que $P(n + 1)$ est vraie.

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = -\ln(n+1) + \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ par hypothèse de récurrence.

On prouve que : $S_{n+1} = -\ln(n+2)$.

* $P(1)$ vraie + hérédité $\Rightarrow P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2) b) On prouve que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ (par composition) et par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

On en déduit que : $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty}$.

FICHE N° 3

EXERCICE N° 1 : On considère la fonction $f : x \longmapsto (x^2 + 4x)\ln x$ sur $]0 ; +\infty[$ et la fonction $g : x \longmapsto (x^2 + 4x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

On développe l'expression de $f(x)$ et on obtient : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

On développe l'expression de $g(x)$ et on obtient : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

EXERCICE N° 2 : *Extrait de Antilles-Guyane, septembre 2009*

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; 1]$ par : $f(x) = 1 + x\ln x$.

1. a. Par croissances comparées, on a : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x\ln x) = 0^-$ et par somme, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

1. b. $\forall\, x \in\ ]0 ; 1]$, on a : $x\ln x \leq 0$ et on en déduit alors : pour tout nombre réel $x \in\ ]0 ; 1]$, on a : $f(x) \leq 1$.

2. a. $\forall\, x \in]0 ; 1]$, on a : $f'(x) = \ln x + 1$.

2. b. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ soit $y = 1(x - 1) + 1$ soit $y = x$ ce qui prouve que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in\ ]0 ; 1]$ par : $g(x) = 1 + x\ln x - x$.

a. $\forall\, x \in\ ]0 ; 1]$, on a : $g'(x) = \ln x$.

$\forall\, x \in\ ]0 ; 1[$, on a : $g'(x) < 0$ et $g'(1) = 0$, ce qui prouve que la fonction g est strictement décroissante sur $]0 ; 1]$. On prouve (même si ce n'est pas demandé !) que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$.

D'où le tableau de variations de la fonction g :

x	0	1
$g'(x)$	‖ −	0
g	‖ **1** ↘	**0**

3. b. $\forall\, x \in\ ]0 ; 1]$, on a : $g(x) = f(x) - x$.

D'après le tableau de variations ci-dessus, on a : $\forall\, x \in\ ]0 ; 1]$, $g(x) \geq 0$ soit $f(x) \geq x$. Ceci prouve que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

EXERCICE N° 3 :

37 page 131 du LIVRE : a) $+\infty$; **b)** $+\infty$; **c)** $+\infty$.

38 page 131 du LIVRE : a) 0^- ; **b)** $+\infty$: on pourra mettre x en facteur ou bien poser $X = \dfrac{1}{x}$ ($x > 0$) et on a alors : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} X = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{X \to 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$ d'après le cours.

39 page 131 du LIVRE :

a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(2)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) * $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\ln(3)$.

* On commence par <u>démontrer</u> que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{2e^x + 3} = \frac{1}{2}$. On en déduit que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\ln(2)$.

<u>41 page 131 du LIVRE</u> :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$; $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: on pourra mettre x en facteur.

c) * $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\forall x > 0$, on a : $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ et on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE N° 4 :

1. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 + 1)\ln(2x)$.

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$.

2. On considère la fonction g définie sur $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(2x - 4) - x^2 + 2x$.

$\forall x > 2$, on a : $g(x) = x^2\left(\dfrac{\ln(2x-4)}{x^2} - 1 + \dfrac{2}{x}\right)$.

On prouve que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x-4)}{x^2} = 0$ *(Indication :* $\forall x > 2, \dfrac{\ln(2x-4)}{x^2} = \dfrac{\ln(2x-4)}{2x-4} \times \dfrac{2x-4}{x^2}$*).*

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 + \dfrac{2}{x}\right) = -1$ et on en déduit que : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$.

EXERCICE N° 5 :

1) 46 page 132 du LIVRE :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $3 + e^x = e^x(3e^{-x} + 1)$. **2)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln(3)$ donc la droite d'équation $y = \ln(3)$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $(-\infty)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - x\big) = 0$ donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $(+\infty)$.

113 page 142 du LIVRE :

1) Voir cours … **2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x}\ln x) = 0^+$ car : $\forall x > 0$, $e^{-x}\ln x = \dfrac{\ln x}{e^x} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{e^x}$

2) a) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x}\ln x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x}) = 0^+$.

2) b) $\forall x > 0$, on a : $f'(x) = -e^{-x} \times (\ln(x) + 1) + e^{-x} \times \left(\dfrac{1}{x} + 0\right) = \ldots = e^{-x} \times g(x)$.

2) c) $\forall x > 1$, on a : $\dfrac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 1 < 0$. $\forall x > 1$, on a : $-\ln(x) < 0$.

Par somme, on en déduit que : $\forall x > 1$, $g(x) < 0$.

2) d) On démontre (de la même façon que dans la question 2) c)) que : $\forall\ 0 < x < 1$, on a : $g(x) > 0$.

Grâce aux résultats des questions précédentes, on en déduit le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\boldsymbol{\frac{1}{e}}$	↘	$\mathbf{0}$

Le théorème de la bijection permet de prouver que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{e}$ admet une solution unique, qui vaut 1.

2) 34 page 156 du LIVRE : correction page 470 dans le livre.

35 page 156 du LIVRE :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On pourra écrire : $\forall\, x > 0$ et $x \neq 1$, on a : $f(x) = \left(\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{\ln x}\right)^3 = \left(\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{\ln \frac{x}{3} + \ln 3}\right)^3$.

En posant $X = \dfrac{x}{3}$, on prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{\ln \frac{x}{3}}\right) = +\infty$.

3) <u>53 page 158 du LIVRE :</u>

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. On posera $X = \dfrac{1}{x}$ ($x > 0$) et on <u>prouvera</u> que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$. On posera : $X = \dfrac{\ln 2}{x}$ ($x > 0$) et on prouvera que : $\forall\, x > 0$, $f(x) = \ln 2 \times \dfrac{e^{\frac{\ln 2}{x}} - 1}{\frac{\ln 2}{x}}$.

60 page 159 du LIVRE :

1) a) $\forall\, x \in I =]0\,;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}}$.

On en déduit que :
f est strictement croissante sur $]0\,; e^2]$ et que f est strictement décroissante sur $[e^2\,; +\infty[$.
1) b) On trouve : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$.

Remarque : pour la limite en $(+\infty)$, on écrira $f(x)$ sous la forme $f(x) = 2\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ et on posera $X = \sqrt{x}$ ($x > 0$).

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	0^+

2) T : $y = x - 1$.

3) a) $\forall\, x \in I$, on a : $g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \dfrac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\left(2x\sqrt{x} - 2 + \ln x\right)$ et on trouve la forme indiquée.

3) b) $g'(1) = 0$.
Sur $]0\,;+\infty[$, le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1)$.
On prouve que :
sur $]0\,;1[$, $\ln x < 0$ et $x\sqrt{x} - 1 < 0$ et par somme, on en déduit que :
$\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1) < 0$ et par suite $g'(x) < 0$.
sur $]1\,;+\infty[$, $\ln x > 0$ et $x\sqrt{x} - 1 > 0$ et par somme, on en déduit que :
$\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1) > 0$ et par suite $g'(x) > 0$.
3) c) $g(1) = 0$. On obtient alors le tableau de variations de g :

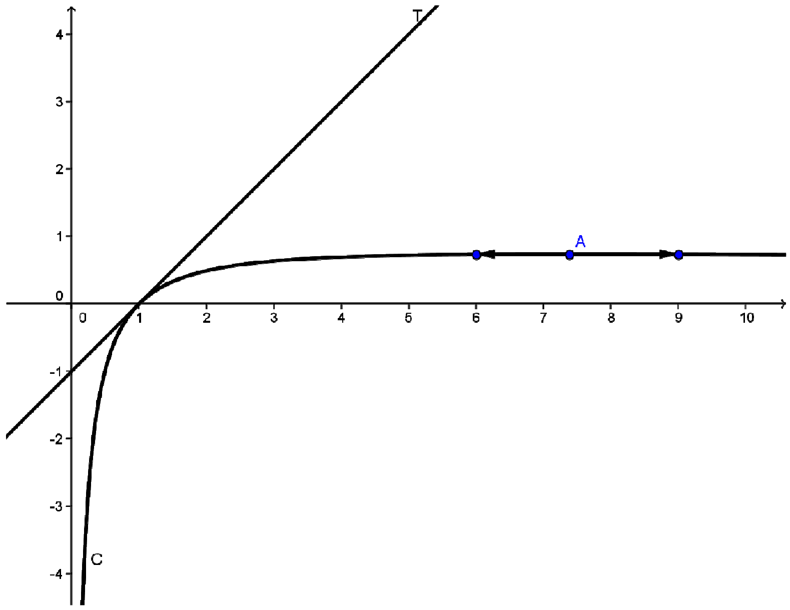
x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
g	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

On en déduit, grâce à ce tableau que : $\forall\, x \in$ I, $g(x) \geq 0$.

3) d) $\forall\, x \in$ I, on a : $g(x) = (x - 1) - f(x)$. On a donc : $\forall\, x \in$ I, $x - 1 \geq f(x)$.

On en déduit que la courbe C est en dessous de la tangente T sur l'intervalle I =]0 ; + ∞[.

4)



EXERCICE N° 6 :

$D_f = \mathbb{R}$ car : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $1 + e^{-2x} > 1 > 0$.

* <u>**Asymptote au voisinage de (+ ∞) :**</u>

On prouve que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-2x}) = 1$ (composition) puis que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0$ (composition + continuité de la fonction ln sur]0 ; +∞[.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{G}_f$ au voisinage de (+ ∞).

* <u>**Asymptote au voisinage de (- ∞) :**</u>

$\forall\, x < 0$, on a :

$$f(x) = x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right) = x + \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}\right) = x + \ln(e^{2x} + 1) - \ln(e^{2x}) = x + \ln(e^{2x} + 1) - 2x = -x + \ln(e^{2x} + 1)$$

$f(x) - (-x) = \ln(e^{2x} + 1)$

On prouve que : $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x} + 1) = 1$ (composition) puis que $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(e^{2x} + 1) = 0$ (composition + continuité de la fonction ln sur]0 ; +∞[.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (-x)\big) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{G}_f$ au voisinage de (- ∞).

EXERCICE N° 7 : On note N le nombre entier $2^{12\,345}$.

1) $\log(N) = \log(2^{12\,345}) = 12\,345\log(2)$ et $E[12\,345\log(2)] = E[\log(N)] =$ **3716**.

2) E[log(N)] = **3716** donc : $3716 \leq \log(N) < 3717$ par définition de la partie entière d'un nombre.

Comme $\log(10^n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors : $\log(10^{3716}) \leq \log(N) < \log(10^{3717})$ et par stricte croissance de la fonction log sur $]0 ; +\infty[$, on en déduit l'encadrement $10^{3716} \leq N < 10^{3717}$.

3) 10^{3716} est un nombre comportant 3717 chiffres (un chiffre 1 et 3716 zéros), donc **l'écriture décimale de N comporte 3717 chiffres.**

EXERCICE N° 8 :

1. 10^n est un nombre comportant $(n + 1)$ chiffres (un chiffre 1 et n zéros).

Comme A est supérieur à 10^n et inférieur à 10^{n+1}, alors **la partie entière de A contient (n + 1) chiffres.**

On a : $\log(10^n) \leq \log(A) < \log(10^{n+1})$ soit $\boldsymbol{n \leq \log(A) < n + 1}$.

On en déduit que : $\mathbf{E[\log(A)] = \boldsymbol{n}}$.

2. $\log(A) = 4{,}51$ donc : $4 \leq \log(A) < 5 \Leftrightarrow 10^4 \leq A < 10^5$ et **la partie entière de A contient donc 5 chiffres**.

$\log(\sqrt{A}) = \frac{1}{2}\log(A) = 2{,}255$ donc : $2 \leq \log(\sqrt{A}) < 3 \Leftrightarrow 10^2 \leq \sqrt{A} < 10^3$ et **la partie entière de $\sqrt{A}$ contient donc 3 chiffres**.

$\log(A^{1000}) = 1000\log(A) = 4510$ donc : $A^{1000} = 10^{4510}$ et **A^{1000} s'écrit donc avec 4511 chiffres**.

EXERCICE N° 9 :

50 page 132 du LIVRE :

a) $x \in D_f \Leftrightarrow \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in \,]1 ; +\infty[}$.

$x \to \ln(x)$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et est strictement positive sur $]1 ; +\infty[$, alors par théorème de composition, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ donc a fortiori sur I.

$$\forall x \in \mathrm{I}, \text{ on a : } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}.$$

b) $x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 > 0$ et $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0 \Leftrightarrow x > -1$ et $x > 0$ et $x \neq 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in \,]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[}$.

On prouve que $x \to \ln(x + 1)$ est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ (composition), donc a fortiori sur I.

On a $x \to \ln(x)$ dérivable sur $]0 ; +\infty[$ donc a fortiori sur I.

f est dérivable sur I comme quotient (de dénominateur non nul) de fonctions dérivables sur I .

$$\forall x \in \mathrm{I}, \text{ on a : } f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times \ln(x) - \ln(x+1) \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{x\ln(x) - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)}}{(\ln x)^2} = \frac{x\ln(x) - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}$$

52 page 132 du LIVRE :

a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 0$ et $x \to 1 + e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}}$.

b) On a : $x \to e^{2x} - e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$e^{2x} - e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - X + 1 > 0 \\ X = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \in \mathbb{R} \\ X = e^x \end{cases} \text{ car : } \forall X \in \mathbb{R},\ X^2 - X + 1 > 0\ (\Delta = -3 < 0).$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a donc : $e^{2x} - e^x + 1 > 0$.

On en déduit que la fonction f (composition) est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}.$$

EXERCICE N° 10 : ***Annabac 2012 : Exercice 3 page 236.***

Correction pages 246/247. Attention au corrigé …

EXERCICE N° 11 : *Extrait de l'épreuve du concours FESIC (mai 2010)*

a. $\mathscr{D}$ =]- 1 ; 1[: $\boxed{\textbf{VRAI}}$**.** $x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} > 0$ et $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0$ et $x \neq 1$.

b. f est paire : $\boxed{\textbf{FAUX}}$**.**

Contre-exemple : $f(0{,}5) = \dfrac{1}{2} \times \ln\left(\dfrac{1{,}5}{0{,}5}\right) = \dfrac{1}{2} \times \ln 3$ et $f(-0{,}5) = \dfrac{1}{2} \times \ln\left(\dfrac{0{,}5}{1{,}5}\right) = \dfrac{1}{2} \times \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \times \ln 3$.

Remarque : on peut prouver que f est impaire sur]- 1 ; 1[.

c. f est décroissante sur $\mathscr{D}$: $\boxed{\textbf{FAUX}}$**.** $\forall x \in$]- 1 ; 1[, on a : $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(u(x))$ avec $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

u est strictement positive sur]- 1 ; 1[.

Par composition, on en déduit que f est dérivable sur]- 1 ; 1[.

$\forall x \in$]- 1 ; 1[, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$.

On a : $\forall x \in$]- 1 ; 1[, $f'(x) > 0$, **ce qui prouve que la fonction *f* est strictement croissante sur]- 1 ; 1[.**

d. Quel que soit le réel b, l'équation $f(x) = b$ possède l'unique solution $x = \dfrac{e^{2b} - 1}{e^{2b} + 1}$: $\boxed{\textbf{VRAI}}$**.**

On prouve que : $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, f est continue et strictement croissante sur]- 1 ; 1[,

donc f établit une bijection de]- 1 ; 1[sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de la bijection permet d'en déduire que l'équation $f(x) = b$ possède une unique solution pour tout réel b.

$\forall x \in$]- 1 ; 1[et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a :

$f(x) = b \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = b \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = e^{2b} \Leftrightarrow 1 + x = e^{2b} - xe^{2b} \Leftrightarrow x(1 + e^{2b}) = e^{2b} - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{2b} - 1}{e^{2b} + 1}$.

EXERCICE N° 12 : *Extrait de l'épreuve du concours ESIEE (mai 2010)*

Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

La fonction f admet f' pour dérivée sur D :

(A) $D = \mathbb{R}$; $f(x) = \ln(x^2 + 2)$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$: $\boxed{\textbf{FAUX}}$**.**

***f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$.**

(B) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)}$: $\boxed{\textbf{FAUX}}$**.**

***f* est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^3}$.**

(C) $D = \mathbb{R}$; $f(x) = e^{2x}$ et $f'(x) = e^{2x}$: $\boxed{\textbf{FAUX}}$.

***f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2e^{2x}$.**

(D) $D =]0 ; +\infty[$; $f(x) = x\ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ et $f'(x) = -\ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$: $\boxed{\textbf{VRAI}}$.

***f* est dérivable sur]- 1 ; + ∞[donc sur]0 ; + ∞[.**

$$\forall x > 0, \text{ on a : } f'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) + x \times \frac{-\dfrac{1}{(x+1)^2}}{\dfrac{1}{x+1}} = -\ln(x+1) + x \times \frac{-1}{(x+1)^2} \times (x+1) = -\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

(E) $D = \mathbb{R}$; $f(x) = (x^2 + 1)e^{x^2}$ et $f'(x) = (2x^3 + 4x + 1)e^{x^2}$: $\boxed{\textbf{FAUX}}$.

***f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x \times e^{x^2} + (x^2 + 1) \times (2x \times e^{x^2}) = (2x^3 + 4x)e^{x^2}$.**

EXERCICE N° 13 :
85 page 137 du LIVRE :

1. a) $\forall x > 0$, on a : $x(\ln x)^2 = (\sqrt{x})^2 \times \left(\ln (\sqrt{x})^2\right)^2 = (\sqrt{x})^2 \times \left(2 \times \ln\sqrt{x}\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$.

On prouve (composition) que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\sqrt{x} \times \ln(\sqrt{x})\right] = 0$ (croissances comparées) et on en déduit que :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \boldsymbol{x(\ln x)^2 = 0}$.

1. b) $\forall x > 0$, on a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = (\ln x)^2 + 1$. Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$, alors on en déduit que :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ et **la fonction *f* n'est donc pas dérivable en 0**.

1. c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ donc la courbe représentative de la fonction *f* admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

2. *f* est dérivable sur]0 ; 1] comme somme et produit de fonctions dérivables sur]0 ; 1].

$\forall x \in]0 ; 1]$, on a : $f'(x) = 1 \times [(\ln x)^2 + 1] + x \times [2 \times \ln x \times \dfrac{1}{x}] = (\ln x)^2 + 1 + 2\ln x = (\ln x + 1)^2$.

$\forall x \in]0 ; 1]$, on a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e} \in]0 ; 1]$.

$\forall x \in]0 ; 1]$, on a : $f'(x) \geq 0$.

On en déduit que la fonction *f* est strictement croissante sur [0 ; 1].

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$f'(x)$	‖	+	0	+	
f	**0**	↗	$\mathbf{\frac{2}{e}}$	↗	**1**

$f(1) = 1 \times (0 + 1) = 1$ et $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \times \left[\left(\ln\dfrac{1}{e}\right)^2 + 1\right] = \dfrac{1}{e} \times [(-1)^2 + 1] = \dfrac{2}{e}$.

3. a) $T_A : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(1) = (\ln 1 + 1)^2 = 1$ et $f(1) = 1$.

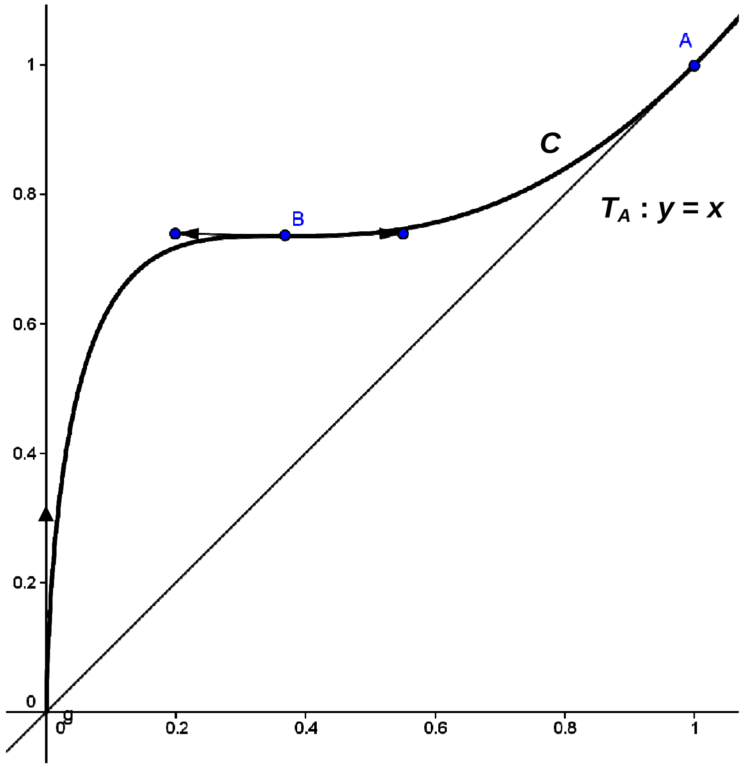
On en déduit que : $T_A : y = x$ et la tangente en A à la courbe *C* passe bien par l'origine O du repère.

3. b) (OA) : $y = x$. (OA) est la tangente à la courbe *C* au point A.

$\forall x \in]0 ; 1]$, on a : $f(x) - x = x[\ln x]^2$ et $\forall x \in]0 ; 1]$, on a : $x[\ln x]^2 \geq 0$ soit $f(x) - x \geq 0$.

Conclusion : Sur]0 ; 1[, la courbe *C* est strictement au-dessus de la droite (OA). La courbe *C* et la droite (OA) ont deux points en commun sur [0 ; 1] : le point O(0 ; 0) et le point A(1 ; 1).

4.



<u>111 page 142 du LIVRE</u>.

1. a) FAUX. $\forall$ $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, on a : $\boldsymbol{u_n = \frac{2}{3^{n-1}}}$.

1. b) VRAI. $\forall$ $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$**,** on a : $\boldsymbol{v_{n+1} - v_n} = \ln(3^{n-1}) - \ln(3^n) = \ln3(n - 1 - n) = \mathbf{-\ln3}$.

1. c) VRAI. $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n}(v_1 + \ldots + v_n) = \frac{1}{n} \times \frac{v_1 + v_n}{2} \times n$ car (v_n) est une suite arithmétique.

$\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n}(v_1 + \ldots + v_n) = \frac{v_1 + v_n}{2} = \frac{\ln 2 + \ln\left(\frac{2}{3^{n-1}}\right)}{2} = \frac{2\ln2 - \ln(3^{n-1})}{2} = \frac{\ln4 - (n-1)\ln3}{2}$

$\forall$ $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$**,** on a : $\boldsymbol{\frac{1}{n}(v_1 + \ldots + v_n)} = \frac{\ln4 + \ln3 - n\ln3}{2} = \boldsymbol{\frac{\ln12 - n\ln3}{2}}$.

2. a) FAUX. $x \in D_g \Leftrightarrow f(x) > 0$ et $x \in D_f \Leftrightarrow -2 < x < 2$ et $x \neq 1 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x \in]-2\,;1[\cup]1\,;2[}$.

2. b) FAUX. g est dérivable sur **]- 2 ; 1[∪]1 ; 2[** et $\forall$ $x \in]-2\,;1[\cup]1\,;2[$, on a : $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

On en déduit que ***g* est dérivable en 0** et $\boldsymbol{g'(0)} = \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{0}{e} = \mathbf{0}$.

2. c) VRAI. $\forall$ $x \in]-2\,;1[\cup]1\,;2[$, on a :

$g(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(f(x)) = 1 \Leftrightarrow f(x) = e \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x = 0}$ et $\boldsymbol{x = \alpha}$ avec α tel que $1 < \alpha < 2$.

2. d) VRAI.

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} X} = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ln(f(0)) = \ln e = \mathbf{1}$ par continuité de la fonction f sur]- ∞ ; 2[et par continuité de la fonction ln sur]0 ; + ∞[.

$\lim\limits_{X \to 1} g(X) = \lim\limits_{X \to 1} (\ln(f(X)))$

$\lim\limits_{X \to 1} f(X) = f(1) = 0^+$ par continuité de la fonction f sur]- ∞ ; 2[et $\lim\limits_{Y \to 0^+} \ln(Y) = -\infty$ (cours), alors par composition, on en déduit que : $\lim\limits_{X \to 1} \ln(f(X)) = -\infty$ soit $\boldsymbol{\lim\limits_{X \to 1} g(X) = -\infty}$.

Finalement : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} X = 1}$ **et** $\boldsymbol{\lim\limits_{X \to 1} g(X) = -\infty}$**, alors par composition, on en déduit que :** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} g(g(x)) = -\infty}$**.**

EXERCICE N° 14 : Soit la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

1. $x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1} > 0$ et $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0$ et $x \neq -1 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x \in \,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[}$**.**

2. $x \to \dfrac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme fonction rationnelle définie sur cet intervalle.

$x \to \dfrac{x-1}{x+1}$ est strictement positive sur $]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$.

Par théorème de composition, on en déduit que ***f* est dérivable sur $]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$.**

$\forall$ $\boldsymbol{x \in \,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[}$, on a : $\boldsymbol{f'(x)} = \dfrac{\dfrac{1 \times (x+1) - 1 \times (x-1)}{(x+1)^2}}{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{2}{(x+1)^2} \times \dfrac{x+1}{x-1} = \boldsymbol{\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}}$.

$\forall\, x \in \,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$, on a : $(x+1)(x-1) > 0$. Par suite : $\forall$ $\boldsymbol{x \in \,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[}$**, on a $\boldsymbol{f'(x) > 0}$.**

***f* est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.**

3. On prouve que : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)}$.

On en déduit que l'axe $(x'x)$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

On prouve que $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty}$ **et** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty}$.

On en déduit deux asymptotes verticales pour la courbe représentative de f : l'une d'équation $x = -1$ et l'autre d'équation $x = 1$.

On peut résumer tous les résultats dans un tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖		‖	+	
f	**0**	↗	**$+\infty$** ‖		‖ **$-\infty$**	↗	**0**