ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

FICHE 1 :

EXERCICE 1 :

$u_3 = u_{15} - 12r = 7 - 12 \times \frac{1}{2} = 1$ $\qquad$ $u_5 = u_{15} - 10r = 7 - 10 \times \frac{1}{2} = 2$

$u_{10} = u_{15} - 5r = 7 - 5 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{15} + (n - 15) \times r = 7 + (n - 15) \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}$.

EXERCICE 2 :

15 page 14 du livre : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$v_{n+1} - v_n = 3r$, donc **(v_n) est une suite arithmétique de raison $3r$** ;
$w_{n+1} - w_n = 2r$, donc **(w_n) est une suite arithmétique de raison $2r$**.

18 page 14 du livre : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n \neq 0$.
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$, donc **($u_n$) est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$** et de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 3 :

$\mathbf{S_1} = \frac{2005 \times 2006}{2} = \mathbf{2\,011\,015}$ $\qquad$ et $\qquad$ $\mathbf{S_2} = \frac{9999 \times 10000}{2} - 2\,011\,015 = \mathbf{47\,983\,985}$

EXERCICE 4 :

25 page 15 du livre : (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$, donc :
$S = u_3 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$ où q est la raison de la suite géométrique. On trouve **S = 2040**.

EXERCICE 5 :

La suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n$ est une suite géométrique de raison (- 2) et de premier terme $u_0 = 1$. On en déduit :
$\mathbf{S} = \frac{1 - 4096 \times (-2)}{1 - (-2)} = \frac{8193}{3} = \mathbf{2731}$.

EXERCICE 6 :

$u_3 = u_0 + 3r$; $u_{10} = u_0 + 10r$ et $u_7 = u_0 + 7r$.

On obtient alors le système : $\begin{cases} 8u_0 + 52r = 672 \\ u_0 + 7r = 81 \end{cases}$. La résolution de ce système de deux équations donne :
$\boldsymbol{r = -6}$ **et** $\boldsymbol{u_0 = 123}$.

EXERCICE 7 :

1) $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{3}$; $u_3 = \frac{1}{4}$; $u_4 = \frac{1}{5}$.

On peut ainsi conjecturer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 1$.

Donc (v_n) est la suite arithmétique de raison 1 et de 1er terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

3) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a : $v_n = 1 + n$ et $u_n = \frac{1}{n+1}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

EXERCICE 8 :

1) $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$; $u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$; $u_4 = \frac{4}{5}$; $u_5 = \frac{5}{6}$.

2) Conjecture et vérification : $u_6 = \frac{6}{7}$.

3) On s'attend à $u_{101} = \frac{101}{102}$, mais ce résultat n'est pas certain !

Si on a prouvé par le calcul que $u_{100} = \frac{100}{101}$, alors :

$$u_{101} = u_{100} + \frac{1}{101 \times 102} = \frac{100}{101} + \frac{1}{101 \times 102} = \frac{100 \times 102 + 1}{101 \times 102} = \frac{10201}{101 \times 102} = \frac{101 \times 101}{101 \times 102} = \frac{101}{102}$$

4) $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{(k+1) \times (k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \times (k+2)} = \ldots = \frac{k+1}{k+2}$ pour tout k entier tel que $k \geq 1$.

5) Grâce au résultat de la question 4) et à u_6, on en déduit $u_7 = \frac{7}{8}$.

Grâce au résultat de la question 4) et à u_7, on en déduit $u_8 = \frac{8}{9}$ etc ...

On peut connaître u_{10} à partir de u_9.
On peut connaître u_{1000} à partir de u_{999}.

6) Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $u_n = \frac{n}{n+1}$.

EXERCICE 9 :
33 page 16 du livre :
1) a) $S_1 = 1$; $S_2 = 5$; $S_3 = 14$; $S_4 = 30$. **1) b)** $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$.

2) On note, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $P(n)$ la proposition : « $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »

*Initialisation : P(1) est vraie ;
* Hérédité : On suppose $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel n tel que $n \geq 1$ et on prouve que :
$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$;

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 10 :

On note, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $P(n)$ la proposition : « $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ».

*Initialisation : P(1) est vraie ;
* Hérédité : On suppose $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel n tel que $n \geq 1$ et on prouve que :
$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$;

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

EXERCICE 11 : On note, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $P(n)$ la proposition : « $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ »

*Initialisation : P(1) est vraie ;
* Hérédité : On suppose $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel n non nul et on prouve que :

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n+1)^2$;

$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) + 2(n+1) - 1 = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) + 2n + 1 \ldots$

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.

EXERCICE 12 :
52 page 17 du livre :

On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8 ».
* P(0) est vraie (car $3^{2\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0$) ;
* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n et on prouve que : « $3^{2(n+1)} - 1$ est un multiple de 8 ».
$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \times 3^2 - 1 = 3^{2n} \times 3^2 + (8 - 9) = 3^2\,(3^{2n} - 1) + 8 \ldots.$

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

<u>56 page 17 du livre :</u>

On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $0 < u_n < 1$ ».
* P(0) est vraie par hypothèse de l'énoncé ;
* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n et on prouve que : « $0 < u_{n+1} < 1$ ».

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n) = f(u_n)$ où $f : x \longmapsto x(2 - x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme fonction polynôme) et $f' : x \longmapsto 2(1 - x)$.
$\forall\, x \in\ ]0\,;1[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0\,;1[$.
Enfin, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Grâce à l'hypothèse de récurrence et à la stricte croissance de f sur $]0\,;1[$, on prouve que : $0 < u_{n+1} < 1$.

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

34 page 16 du livre :

On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$,
P(n) la proposition : « $1 + 2 \times 2\,! + 3 \times 3\,! + \ldots + n \times n\,! = (n+1)\,! - 1$ »
* P(1) est vraie ;
* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n non nul et on prouve que :
$1 + 2 \times 2\,! + 3 \times 3\,! + \ldots + n \times n\,! + (n+1) \times (n+1)\,! = (n+2)\,! - 1$;

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 \times 2\,! + 3 \times 3\,! + \ldots + n \times n\,! = (n+1)\,! - 1$.

38 page 16 du livre :

On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, P(n) la proposition : « $n\,! \geq 2^{n-1}$ »
* P(1) est vraie ;
* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n non nul et on prouve que : $(n+1)\,! \geq 2^n$;

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n\,! \geq 2^{n-1}$.

EXERCICE 13 :
a) $u_0 = 0$; $u_1 = u_0 + 0 = 0$; $u_2 = 1$; $u_3 = 3$; $u_4 = 6$; $u_5 = 10$; …

Conjecture : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(n-1) \times n}{2}$.

On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $u_n = \dfrac{(n-1) \times n}{2}$ ».

* P(0) est vraie ;

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n et on prouve que : $u_{n+1} = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$;

$u_{n+1} = u_n + n = \dfrac{(n-1) \times n}{2} + n$ d'après l'hypothèse de récurrence …

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(n-1) \times n}{2}$.

<u>b)</u> $u_1 = 1$; $u_2 = \dfrac{1}{2}$; $u_3 = \dfrac{1}{3}$; $u_4 = \dfrac{1}{4}$ …

Conjecture : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}$.

On note, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, P(n) la proposition : « $u_n = \dfrac{1}{n}$ ».

* P(1) est vraie ;

* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n non nul et on prouve que : $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$;

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1}$ d'après l'hypothèse de récurrence …

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$.

<u>c)</u> $u_0 = 3$; $u_1 = \sqrt{10}$; $u_2 = \sqrt{11}$; $u_3 = \sqrt{12}$ …

Conjecture : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+9}$.

On note, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $u_n = \sqrt{n+9}$ ».

* P(0) est vraie ;

* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n et on prouve que : $u_{n+1} = \sqrt{(n+1)+9}$;

$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{n+9}\right)^2}$ d'après l'hypothèse de récurrence …

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+9}$.

<u>EXERCICE 14 :</u>

a) On note, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $0 \le u_n \le 5$ ».

Étape 1 : <u>Initialisation.</u>

$u_0 \in [0 ; 4]$, donc $0 \le u_0 \le 4$ et par suite $0 \le u_0 \le 5$. P(0) est donc vraie.

Étape 2 : <u>Hérédité.</u>

Posons comme hypothèse de récurrence : « $0 \le u_p \le 5$ » <u>pour un entier</u> $p \ge 0$.

Prouvons que la propriété est encore vraie au rang $p + 1$: « $0 \le u_{p+1} \le 5$ »

Par hypothèse de récurrence : $0 \le u_p \le 5$, donc $15 \le u_p + 15 \le 20$.

Puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit : $\sqrt{15} \le \sqrt{u_p + 15} \le \sqrt{20}$, soit $\sqrt{15} \le u_{p+1} \le \sqrt{20}$.

Comme $\sqrt{15} > 0$ et $\sqrt{20} < \sqrt{25}$ ou $\sqrt{20} < 5$, on en déduit que : $0 \le u_{p+1} \le 5$.

La propriété est donc vérifiée au rang $p + 1$.

Étape 3 : sous ces deux conditions, on en déduit :

<u>Conclusion :</u> pour tout entier $n \ge 0$, $0 \le u_n \le 5$.

b) On note, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $4 \le u_n \le 10$ ».

Étape 1 : <u>Initialisation.</u>

$u_0 \in [5 ; 10]$, donc $5 \le u_0 \le 10$ et par suite $4 \le u_0 \le 10$. P(0) est donc vraie.

Étape 2 : <u>Hérédité.</u>

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

Posons comme hypothèse de récurrence : « $4 \leq u_p \leq 10$ » pour un entier $p \geq 0$.
Prouvons que la propriété est encore vraie au rang $p + 1$: « $4 \leq u_{p+1} \leq 10$ »
Par hypothèse de récurrence : $4 \leq u_p \leq 10$, donc $19 \leq u_p + 15 \leq 25$.
Puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit : $\sqrt{19} \leq \sqrt{u_p + 15} \leq \sqrt{25}$, soit $\sqrt{19} \leq u_{p+1} \leq 5$.
Comme $\sqrt{16} < \sqrt{19}$ ou $4 < \sqrt{19}$ et $5 < 10$, on en déduit que : $4 \leq u_{p+1} \leq 10$
La propriété est donc vérifiée au rang $p + 1$.
Étape 3 : sous ces deux conditions, on en déduit :
Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, $4 \leq u_n \leq 10$.

EXERCICE 15 :
1) $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = (9 + 1) \times 10^n + 1 = 9 \times 10^n + 10^n + 1$.
2) Supposons que la propriété (P_p) soit vraie pour un entier p tel que $p \geq 0$.
Par hypothèse de récurrence, on a donc : $10^p + 1$ est un multiple de 9.
Or, d'après la question 1) : $10^{p+1} + 1 = 9 \times 10^p + (10^p + 1)$.
Comme $10^p + 1$ est un multiple de 9 par hypothèse de récurrence, alors il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $10^p + 1 = 9k$. D'où : $10^{p+1} + 1 = 9 \times 10^p + (10^p + 1) = 9 \times 10^p + 9k = 9(10^p + k)$ avec $10^p + k$ appartenant à $\mathbb{N}^*$.
On en déduit que $10^{p+1} + 1$ est un multiple de 9 et la propriété (P_n) est donc héréditaire.
3) Cette propriété n'est pourtant jamais vérifiée car la somme des chiffres de tout nombre s'écrivant sous la forme $10^n + 1$ est 2 : ce nombre n'est donc jamais divisible par 9 !

FICHE 2 :

EXERCICE 1 : 30 page 15 du livre : corrigé dans le livre page 468.
EXERCICE 2 :

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{2}{3}u_n - 1 + 3 = \frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}(u_n + 3) = \frac{2}{3}v_n$.

Ceci prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme : $v_0 = u_0 + 3 = 1$.

2) D'après le résultat de la question 1), on en déduit :

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = v_n - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$.

3) (S_n) est la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

On note, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $S_n = -3n - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ ».

* P(0) est vraie (car $S_0 = u_0 = -2$ et $-3n - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = -3 \times 0 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{0+1} = 0 - 3 \times \frac{2}{3} = -2$).

* On suppose P(n) vérifiée pour un entier naturel n et on prouve que : $S_{n+1} = -3(n + 1) - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$;

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = -3n - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + u_{n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence …

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = -3n - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

EXERCICE 3 :

$u_1 = 0$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$; $u_4 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$ …

Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n-1}{n}$.

On note, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, P(n) la proposition : « $u_n = \frac{n-1}{n}$ ».

* P(1) est vraie ;

* On suppose P(n) vérifiée pour un entier naturel n non nul et on prouve que : $u_{n+1} = \frac{n}{n+1}$;

$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - \frac{n-1}{n}}$ d'après l'hypothèse de récurrence …

* On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n-1}{n}$.

Par suite : $u_{2011} = \frac{2010}{2011}$.

EXERCICE 4 :

a) u_n est la somme des (n + 1) premiers termes consécutifs de la suite géométrique de raison $\frac{2}{7}$ et de premier terme 1. Par suite :

$$u_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{7}} = \frac{7}{5} \times \left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right)$$

Pour tout entier naturel n : $\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right) \leq 1$ donc $u_n \leq \frac{7}{5}$.

La suite (u_n) est donc majorée par $\frac{7}{5}$.

b) On prouve que, pour tout entier naturel n : $8 \leq u_n \leq 12$. La suite (u_n) est donc bornée et majorée par 12.

EXERCICE 5 :
7 page 14 du livre :

a) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. **La suite (u_n) est strictement croissante.**

b) $u_0 = 1$; $u_1 = -\frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{4}$ etc … u_n change de signe à chaque indice, **donc la suite (u_n) n'est pas monotone.**
8 page 14 du livre :

a) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. **La suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.**

Remarque : 0 ! = 1 ! = 1.

b) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}$, donc pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est donc strictement décroissante à partir du rang 1.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

11 page 14 du livre :

* Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1}$, donc pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante à partir du rang 1.

* Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$v_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ et $v_{n+1} - v_n = \ldots = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \ldots = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)}$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n > 0$.

La suite (v_n) est donc strictement croissante à partir du rang 1.

12 page 14 du livre :

a) $u_0 = 8$; $u_1 = 8$; $u_2 = 8$ etc … $u_n = 8$ pour tout n de $\mathbb{N}$. **La suite (u_n) est constante**.

b) Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{4}(u_n - u_{n-1})$.

Ceci prouve que $(u_{n+1} - u_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $u_1 - u_0 = \dfrac{3}{2}$.

On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Remarque : Autre méthode.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{4}u_n + 2$ et on montre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n < 8$.

13 page 14 du livre :

Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $(u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n)$.

Comme (u_n) et (v_n) sont deux suites croissantes, alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

Par suite : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) \geq 0$ ou $(u_{n+1} + v_{n+1}) \geq (u_n + v_n)$.

La suite ($u_n + v_n$) est donc croissante.

EXERCICE 6 :

a) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Comme, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$, on en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui prouve que **la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1**.

b) On prouve que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n - 4$.

Pour $n \geq 2$, on a : $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui prouve que **la suite (u_n) est croissante à partir du rang 2** ou **est strictement croissante à partir du rang 3.**

c) Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $n > 0$ et $3^n > 0$, donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

On prouve que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3n}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{1-2n}{3n}$. Comme $n \geq 1$, alors $1 - 2n \leq -1 < 0$ et $3n > 0$.

Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$ soit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Comme la suite (u_n) est à termes strictement positifs, on en déduit que **la suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 1.**

d) ① On montre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $0 < u_n < 1$ ».

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

* $u_0 = \frac{7\pi}{22} \approx 0{,}9996$, donc $0 < u_0 < 1$ et P(0) est vraie.

* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n et on prouve que : $0 < u_{n+1} < 1$;

Comme la fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en déduit :
$0 < u_n < 1$ (par hypothèse de récurrence) $\Rightarrow 0^2 < u_n^2 < 1^2$ soit : $0 < u_{n+1} < 1$, ce qui prouve que P(n + 1) est vérifiée.

* On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.

② Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n$. Comme, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n < 1$, on en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Comme la suite (u_n) est à termes strictement positifs, on peut en conclure que **la suite (u_n) est strictement décroissante.**

EXERCICE 7 :
55 page 17 du livre :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui prouve que **la suite (u_n) est strictement croissante**.

2) On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $u_n > n^2$ ».
* $u_0 = 1$ et $0^2 = 0$ donc $u_0 > 0^2$ et P(0) est vraie.
* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n et on prouve que : $u_{n+1} > (n+1)^2$;
Pour cela, on montre que : $u_{n+1} > (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$ ce qui prouve que P(n + 1) est vérifiée.

* On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > n^2$.

<u>58 page 17 du livre :</u>

1) On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $0 \leq u_n < 2$ ».
* $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 < 2$ et P(0) est vraie.
* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n et on prouve que : $0 \leq u_{n+1} < 2$;
On montre que : $\sqrt{2} \leq u_{n+1} < 2$ et comme $0 \leq \sqrt{2}$, on en déduit que P(n + 1) est vérifiée.

* On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 2$ et par suite : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2}$.

2) On prouve que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$.

Or, d'après la question 1) : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 2$, donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, 2 - u_n > 0 ; 1 + u_n \geq 1 > 0$ et $\sqrt{2 + u_n} + u_n > 0$.

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui prouve que **la suite (u_n) est strictement croissante**.

Remarque : on peut aussi montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ en utilisant le fait que la fonction : $x \rightarrow \sqrt{x + 2}$ est strictement croissante sur $[-2 ; +\infty[$.

59 page 17 du livre :

1) On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $0 \leq u_n \leq 1$ ».
* $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$ et P(0) est vraie.
* On suppose P(n) vérifiée <u>pour un entier naturel</u> n et on prouve que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$;

On prouve que : $u_{n+1} \geq 0$ grâce à la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$ et à l'hypothèse de récurrence.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

Par ailleurs, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-2}{u_n + 3}$ soit $u_{n+1} - 1 < 0$ ou $u_{n+1} < 1$. On a prouvé que : $0 \leq u_{n+1} < 1$ et par suite, $0 \leq u_{n+1} \leq 1$et P(n + 1) est donc vérifiée.

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$.

2)

① $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x+3}$.

f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $]-3 ; +\infty[$.

② On note, pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, P(n) la proposition : « $u_{n+1} < u_n$ ».

* $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = 1$, donc $u_1 < u_0$ et P(0) est donc vérifiée.

* On suppose P(n) vérifiée pour un entier naturel n et on prouve que : $u_{n+2} < u_{n+1}$;
Par hypothèse de récurrence, on a : $u_{n+1} < u_n$.

D'après la question 1), on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$. Or, la fonction f est strictement croissante sur $]-3 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[0 ; +\infty[$.
Par suite : $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ soit $u_{n+2} < u_{n+1}$, ce qui prouve que P(n + 1) est vérifiée.

* On conclut : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, ce qui prouve que **la suite (u_n) est strictement décroissante**.