TS2 **DEVOIR 12 (C 4).**

EXERCICE 1 : *(temps indicatif : 55 minutes)*

PARTIE A – Restitution organisée de connaissances

Pré-requis : On suppose connus les résultats suivants :

- Si A ≠ B, $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) + 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $|b - a| = AB$ avec A(a) et B(b).
- Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a :

  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- L'image du point B par la rotation de centre A et d'angle θ est le point C défini par :

  AC = AB et si A ≠ B, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta + 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a, b et θ.

PARTIE B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_A, puis écrire z_A sous forme exponentielle.

2. a. Écrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

2. b. Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. c. En déduire la forme exponentielle de z_B.

3. On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

3. a. Déterminer l'affixe du point B_1.

3. b. En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O ; \vec{u})$.

4. Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $(O ; \vec{u})$.

On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que M' = M.

a. Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

b. Soit M un point distinct du point O.

Son affixe z est égale à $\rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}$.

Déterminer alors l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).

c. Déterminer l'ensemble (E).

EXERCICE 2 : *(Temps indicatif : 35 minutes)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$.

1. Étudier la limite de f en $(-\infty)$.

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

3. b. En déduire que, pour tout réel x strictement négatif, on a : $f'(x) < 0$.

3. c. Établir alors le tableau de variation de f sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

TOURNEZ S.V.P.

4. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $]- \infty ; 0]$.
Prouver que $x_0 \in [- 1 ; 0]$.

5. Antoine, qui est passionné d'algorithmique, a écrit un programme sur sa calculatrice.
Voici ci-dessous les écrans de calculatrice saisis par Antoine et son voisin :

CASIO

```
0 → X
- 1 → Y
While Y < 0
X – 0,1 → X
(X – 1) × (2 – e^(- X)) → Y
WhileEnd
X ◢
"et"
X + 0,1 ◢
```

TEXAS

```
: 0 sto→ X
: - 1 sto→ Y
: While Y < 0
: X – 0,1 sto→ X
: (X – 1) × (2 – e^(- X)) sto→ Y
: End
: Disp X, "et",X + 0,1
```

a. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?
b. Que permet d'obtenir cet algorithme ?
c. Dans l'algorithme ci-dessus, la valeur de P était de 0,1.
Modifier cet algorithme pour que l'on demande à l'utilisateur la précision P (P > 0 !) désirée.
Recopier l'algorithme modifié (correspondant à votre calculatrice !) sur la copie.

6. Saisir ce programme sur la calculatrice et trouver les valeurs affichées en sortie pour une précision P valant 0,001 (et si possible, en fonction de la capacité de la calculatrice …, pour P valant 0,000 1).