TS2 **DEVOIR N° 9 (C3)**

EXERCICE 1 : (COURS)

1) Donner la définition d'une suite minorée et d'une suite non majorée.
2) Donner la définition d'une suite strictement décroissante.

EXERCICE 2 : (VRAI ou FAUX)

Pour chaque question, recopier le numéro de la question et indiquer VRAI ou FAUX.
Aucune justification n'est demandée.
Règles de notation :
Bonne réponse : + 0,5 point. *Mauvaise réponse : - 0,25 point.* *Absence de réponse : 0 point.*
Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$:

a. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;

b. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique ;

c. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.

2)

a. Si u est une suite définie par $u_n = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u est strictement croissante si la fonction g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$;

b. La réciproque de la propriété de la question 3) a) est vraie.

EXERCICE 3 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$. On a alors, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan, **en annexe 1** (**à rendre avec la copie**), la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées (2 ; 0).

1) a. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u en laissant apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la minoration de la suite (u_n) ?

2) a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq \frac{23}{18}$.

Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Valider par une démonstration la conjecture émise à la question 1) b) concernant le sens de variation de la suite (u_n).

3) Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

TOURNEZ S.V.P.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \frac{23}{18}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n , puis u_n en fonction de n.
c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
d. BONUS : En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 :
On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$\text{(E)} : \quad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$$

1) a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle : (E') : $y' = 2y + 8$

1) b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2) Résoudre l'équation (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

FIN !

BON COURAGE !!!

NOM : **PRÉNOM :**

ANNEXE 1